Liberato Bittencourt

Coronel de artilharia com o curso de estado maior e de engenharia, bacharel em sciências, dr. em matemáticas e sciências físicas, lente da Escola Militar, diretor do "28 de Setembro" e respectivas "Sucursaes", socio do Instituto Histórico e Geográfico Brasileiro e de varias corporações scientificas e literárias, do país e do estranjeiro.

Curso completo de matemática elementar

(ESCRITO NA ORTOGRAFIA OFICIAL PORTUGUESA)

Volume V

GEOMETRIA

(Parte propedêutica: igualdade, círculo e semelhança)

Livro scientífica e filosòficamente original, para uso de todos os colégios militares e militarizados do Brasil.

ANO DE 1922

Oficinas Gráficas do Ginásio 28 de Setembro

SANTOS—RIO DE JANEIRO—S. PAULO

OBRAS DO DR. LIBERATO BITTENCOURT

SOBRE HISTORIA

Psicologia do Barão do Rio Branco, 1 vol.
Psicologia de Alexandre Herculano, 1 vol.
Triplo Ensaio Psicológico, 1 vol.
Saldanha da Gama (conferencia na Biblioteca de Marinha), 1 vol.
Homens do Brasil (vol. relativo a Sergipe), 1 vol.
Homens do Brasil (vol. relativo á Paraiba), 1 vol.
Guerra contra o Paraguai, Operações da esquadra (memória), 1 vol.

II
SOBRE DOUTRINAS MILITARES

Principes Généraux d'Organization des Armées, 2ª ed., com juizo critico de sumidades militares nacionaes e estrangeiras, 1 vol.
Reforma do Exercito, 1 vol.
Psicologia do Comando em Chefe (em doze numeros do Boletim do Estado Maior do Exercito), 1 vol. grosso.

III
SOBRE SCIÊNCIAS VÁRIAS

Ramos do Saber, classificação das sciências e de todos os ramos da actividade e do saber, com prefacio de Silvio Romero, 4ª ed., 1 vol.
Arithmética Teorica e Prática, 1 vol.
Caderneta de Campo (a entrar para o prélo), 1 vol.
Geometria Algébrica (collab. com S. de Oliveira) 2ª ed., 2 vols

CURSO COMPLETO DE MATEMÁTICA ELEMENTAR:

Vol. I—*Arithmética* (numeração, operações e frações).
Vol. II—*Arithmètica* (parte final).
Vol. III—*Algebra* (linguagem, operações e transformações algébricas).
Vol. IV—*Algebra* (parte final).
Vol. V—*Geometria* (igualdade, circulo e semelhança).
Vol. VI—*Geometria* (rectificação, quadratura e cubatura).
Vol. VII—*Trigonometria*.

IV
SOBRE EDUCAÇÃO

Reforma da Instrucção Militar, 1 vol.
Licções de Coisas, 1 vol.
Educação fisica, intelectual e moral (memoria ao Congresso Pan-Americano), 1 vol.
Educação da Criança, 1 vol.
Os professores militares, 1 vol
Pelo Exercito (conferencia), 1 vol.
Cartilha 28 de Setembro, 1 vol.
Primeiro Ano 28 de Setembro, 1 vol.
Segundo Ano de Setembro, 1 vol.
O Caracter, 1 vol.
Estudo da Lingua Portuguesa, 1 vol.

V
SOBRE BELAS LETRAS

Criticas Criticos, com longo prefacio de Silvio Roméro, 1 vol.

Explicação preliminar

Este volume, o 5º do *Curso completo de matemática elementar* que estamos a publicar corajosamente, original é em feitura e método: obedece, com indispensaveis modificações, ao plano geral, superiormente traçado por Augusto Comte, para o estudo cem vezes atraente da geometria preliminar. Esta sciência não é, como se pensa e se pratica, conjunto enfadonho de teoremas sobre teoremas, quasi sem ligação e nexo, que dificultam sem esclarecer as questões mais elementares do vasto domínio geométrico, senão composto racional de teorias que se ligam umas ás outras com facilidade e segurança, como élos robustos de cadeia possante. A geometria é a medida indirecta da extensão; é a avaliação racional das linhas, superfícies e volumes; é a rectificação, a quadratura e a cubatura. Isso em seu domínio final. Mas para tanto atingir lógicamente, tem a sciência geométrica prévia e absoluta necessidade, não de grupar irreflectidamente princípios sobre princípios, vezes varias os demonstrando por dois ou mais distintos processos, como fazer buscam os livros actuaes, senão muito ao contrário de estabelecer racionalmente os verdadeiros fundamentos da avaliação da extensão, a parte realmente propedêutica, assim facilitando

o dominio final—a rectificação das curvas, o cálculo das áreas e o volume dos sólidos. Pois essa parte fundamental apenas tres grandes teorias compreende, todas de fácil aprendizagem: a da *igualdade*, a da *semelhança* e a elementar do *círculo*, esta última colocada entre aquelas duas, qual o fazemos, por conveniência didática exclusivamente.

Mas a igualdade e a semelhança, como estatue o fundador do positivismo, devem ao mesmo tempo abranger o caso chamado *plano* e o caso erradamente havido *no espaço*: porque *a geometria é uma só, toda éla no espaço*. O próprio plano é aí scientificamente colocado. Palavras textuaes de Aug. Comte, na pagina 259 de sua *Síntese subjectiva*: «Regenerado pela educação enciclopédica, o espírito matemático habitua-se a ver no Espaço, tanto as figuras planas como as esféricas, as cilindricas e as cônicas».

Essa entidade, o espaço, constitue a base lógica dos típos geométricos, de toda a geometria portanto. A denominação de geometria plana e de geometria no espaço deve desaparecer, por anti-scientifica e infeliz. A geometria é uma só, toda éla no espaço. Diga-se *geometria das linhas* ou a uma só dimensão —a *rectificação*; *geometria das superficies* ou a duas dimensões— a *quadratura*; e *geometria dos sólidos* ou a tres dimensões— a *cubatura*. Geometria no espaço, nunca: porque isso é redundância, porque toda a geometria é no espaço.

No domínio superior da sciência não ha essa desastrada expressão divisória, tão abundante aos livros brasileiros mais afamados, senão a denominação, verdadeira porque scientífica, geometria a tres dimensões. E como esta a legítima sciência é, porque se não compreende extensão sem profundidade, antes corpo sem altura, erro é, e dos mais

lamentáveis, o estudo geométrico limitado apenas ao plano, como se faz oficialmente no Brasil, para certas especialidades ou carreiras. O plano só existe por abstração, na imaginação do homem. Por necessidade lógica surgiu êle. E estudar apenas coisas imaginárias, como fazemos, é mais que ingenuidade, porque é loucura bem palpavel. A verdadeira geometria é a dos volumes. O estudo geométrico, pois, só é realmente iniciado, na teoria da igualdade como á da semelhança, com o caso reverso, isto é, com os tipos geométricos, quaes os prismas e pirâmides, cujos elementos se achem em planos diferentes. Eis o pensar superior de A. Comte, o filósofo genial, pensamento que, convenientemente explanado e modificado, pela vez primeira se vae pôr em prática em o Brasil, para festejar tambem scientífica e filosóficamente o cantenário augusto de nossa augusta independência.

O leitor consciencioso e honesto, os alunos estudiosos dos nossos colégios militares e militarizados sobretudo, hão de ver que a geometria preliminar, como se expõe nas paginas modestas deste e do volume seguinte, é assunto que prende pela simplicidade e solidez; que encanta por suas belezas incomparáveis e sugestivas; que entusiasma, enfim, por sua inimitavel poesia scientífica.

Artistas existem por toda a parte, tambem no domínio vásto das conquistas geométricas: que se a sciência é a linha recta austera do caule gigante, que ampara e que sustenta a fronde majestosa; a arte é a linha curva do fruto colorido e apetitoso, que alimenta e que seduz o homem sempre insatisfeito.

—«»—

Por necessidade pedagógica exclusivamente, é o *vol. V* deste *Curso*, relativo á geometria, publicado antes do Vol. III

e do IV, que versam sobre a álgebra. E' fácil entender sem estranhar o feito: ha em português muito compêndio algébrico bem acabado, qual o do grande mestre Sebastião Alves, o que infelizmente não sucede ás *geometrias* em vernáculo. Publicado o *Vol. VI*, sobre o domínio final da sciência—rectificação, quadratura e cubatura, faremos então imprimir o III e o IV volumes do *Curso*, êste relativo ás *equações* e aquêle versando sobre o *cálculo algébrico*, isto é, sobre as tres grandes questões práticas que a êle se prendem lógicamente — *linguagem* algébrica, *operações* algébricas e *transformações* algébricas, verdadeiro cavalo de batalha para os que começam.

—«»—

Adotamos definitivamente nêste volume, depois de fundo meditar, a ortografia oficial portuguêsa, já adotada pela nossa academia de letras: o ardente desejo de ver resolvido o sério problema da unidade ortográfica, dos mais dificeis e uteis em nosso meio, nos levou áquéla resolução, importantissima para todos os escritores de Portugal e do Brasil. E no texto, quanto possivel, buscámos fugir de vez aos multiplos galicismos que pululam em nossa escrita matemática, afeiando e até corrompendo a lingua béla que falamos, o mais notavel patrimônio herdado de augustos antepassados, a mais rica joia a depôr no cólo venturoso das venturosas progenitoras dos lidadores do porvir.

Rio de Janeiro, 1922.

Liberato Bittencourt.

CONTEUDO

GEOMETRIA

- Idéa inicial: toda a geometria é no espaço; o proprio plano está no espaço.
- Parte propedêutica: igualdade, circulo e semelhança
  - Teoria da igualdade
    - caso plano
      - Noções fundamentaes
        - perpendiculares
        - obliquas
        - paraléias
      - Triângulos
        - lei fundamental: angular de Tales
        - casos de igualdade
          - 1· caso—um lado...
          - 2· » --dois lados...
          - 3· » —tres lados...
      - Polígonos: decomposição em triângulos
    - Caso reverso
      - Noções fundamentaes
        - teoria elementar do plano
        - planos perpendiculares e obliquos
        - planos paralélos
        - ângulos poliedros
        - sólidos: prismas e pirâmides
      - igualdade angular
        - triedros
          - lei fundamental: das faces
          - casos de ig.
            - 1·--uma face...
            - 2·--duas faces...
            - 3·--tres faces...
        - poliedros: decomposição em triedros
      - Igualdade dos sólidos
        - pirâmides
          - tetraedros
            - 1· caso--uma face...
            - 2· » --duas faces...
            - 3· » --tres faces...
          - pirâmides quaesquer: dec. em tetraedros.
        - prismas
          - triangulares: dec. em tetraedros
          - quaesquer: dec. em prismas triang.
  - Teoria elementar do circulo
    - Noções fundamentaes
    - Medida angular
      - ângulos planos
      - » sólidos
  - Teoria da semelhança
    - Caso plano
      - Noções fundamentaes
      - Caso triangular
        - Lei fundamental: linear de Tales
        - Casos de semelhança
          - 1·--3 ângulos
          - 2·--dois lados...
          - 3·--tres » ...
      - Caso poligonal: dec. em triângulos
    - Caso reverso
      - Noções fundamentaes
      - Pirâmides
        - tetraedros
          - 1· caso--uma face...
          - 2· » --duas faces...
          - 3· » --tres faces...
        - pirâmides quaesquer: dec. em tetraedros
      - Prismas: dec. em prismas triang. e estes em tetraedros
- Parte finalística: avaliação da extensão (Vol. a seguir)
  - Geom. das linhas: rectificação
  - Geom. das superficies: quadratura
  - Geom. dos volumes: cubatura
- Parte complementar: curvas usuaes

Parte propedêutica

Idéas iniciaes:

1—*A geometria trata da medida indirecta da extensão. Extensão*, ou *corpo*, ou *sólido*, ou *volume* são noções geométricamente equivalentes.

A extensão apresenta-se sempre com as tres dimensões: *comprimento, largura* e *altura* (1). Altura ou *profundidade* são noções equivalentes no ponto de vista geométrico.

O espírito humano, não podendo iniciar com vantagem o estudo da extensão qual éla se apresenta, isto é, com todas as suas dimensões, abstrae uma délas—a altura, e tem as *superfícies*: despreza ainda uma outra dimensão—a largura, e tem as *linhas*; por fim, dispensando o comprimento, tem o *ponto* geométrico, cujas dimensões são scientificamente inapreciaveis. De modo que linhas, como superfícies, não têm existência real: umas e outras só existem na imaginação do homem, como grande necessidade para o fiel entendimento do verdadeiro problema geométrico, o da avaliação da extensão.

Por abstração sucessiva viemos da extensão ao ponto geométrico. Podemos tambem ir dêste áquéla sem dificuldade: *linha* é a imagem gerada pelo movimento de um

---

(1)—*Dimensão* é o sentido segundo o qual as grandezas podem variar. As dimensões são geométricamente tres, acima referidas.

ponto; *superfície* é a figura gerada pelo movimento de uma linha; *sólido* é o corpo gerado pelo movimento de uma superfície. Em qualquer dos casos, o corpo que gera recebe o nome de *geratriz*; e a direcção que toma a geratriz em seu movimento gerador, é denominada *directriz*: a geratriz das superfícies é a linha; a geratriz dos volumes, a superfície: o *plano* é gerado pela linha recta; o *cubo*, pelo quadrado.

Espaço é a base lógica da geometria. O espaço é fundamental á sciência da extensão, afim de que, na avaliação respectiva, possa éla fazer as necessarias abstrações: todos os corpos geométricos—linhas, superfícies e volumes, aí se supõem colocados, para serem convenientemente analisados.

Palavras textuaes de Comte, na *Sinthese*: o geômetra «habitua-se a ver no Espaço, tanto as figuras planas como as esféricas, as cilíndricas e as cônicas.» E, sendo assim, *toda a geometria é no espaço*: o proprio plano está no espaço colocado. A actual geometria, chamada *plana*, deve receber a denominação mais acertada *geometria a duas dimensões*, antes *geometria das superfícies*. Ainda ha a *geometria das linhas*, ou a uma só dimensão, e a *geometria dos volumes*, erradamente chamada *no espaço*, a verdadeira geometria, com todas as dimensões acusadas pelos corpos.

O problema geométrico, ou da avaliação da extensão, compreende duas partes distintas: a *propedêutica* ou fundamental e a *finalística* ou essencial.

A parte propedêutica ocupa-se com duas teorias geraes —a da *igualdade* e a da *semelhança*, uma e outra abrangendo o caso chamado *plano* e tambem o caso chamado *reverso*: o caso plano, quando todos os elementos dos tipos considerados se acham no mesmo plano; o caso reverso, quando

os ditos elementos se vêem em planos diferentes. Inda ha, na parte propedêutica, a *medida angular*, antes a *teoria elementar do círculo*, por exigências didáticas colocada ao meio da teoria da igualdade.

A parte finalística da sciência compreende a geometria das *linhas*, a das *superfícies* e a dos *volumes*. E como o tipo mais fácil entre as linhas é a *recta*, a esta são todas as mais reduzidas: *rectificação* (1) é o correspondente trabalho geométrico; entre as superfícies limitadas a mais simples é o *quadrado*, a êste todas as outras referidas: *quadratura* é o trabalho geométrico relativo á referência; finalmente, o *cubo* é o tipo mais simples entre os volumes de dimensões reduzidas, todos os mais a êle subordinados: *cubatura* é o trabalho geométrico indispensavel.

Vê-se, pois, que a parte propedêutica da sciência geométrica trata de tres grandes questões fundamentaes—a da *igualdade*, a da *semelhança* e a elementar do *círculo*; a parte finalística, de tres outras essenciaes, relativas á medida indirecta da extensão, á legitima sciência geometrica — *rectificação*, *quadratura* e *cubatura* (2).

Como é natural, devemos começar o estudo da geometria pela parte propedêutica, teoria da igualdade, em cada um dos dois casos componentes estabelecendo antes algumas noções indispensaveis, relativas aos diferentes tipos geométricos, antes ao perpendicularismo e ao paralelismo das rectas e dos planos.

(1)—*Rectificação* não é galicismo: traduz em vernáculo o acto de tornar recta, de alinhar. Não é bem essa a exata significação do termo em geometria; éla, porém, não se afasta muito da realidade scientífica.

(2)—O plano de Aug. Comte é outro: para o filósofo genial, compreende tres partes a geometria preliminar: *apreciação fundamental*, *preâmbulo geral* e *coordenação especial*.

Teoria da igualdade

I

CASO PLANO

Noções fundamentaes:

Angulo é a figura formada por duas linhas que se encontram num ponto. No ângulo ha *dois lados*, o *vértice* e a *abertura*. A grandeza do ângulo não depende do tamanho dos lados, senão da abertura dos mesmos.

Uma recta é *perpendicular* a outra, quando caindo sobre esta não se inclina nem para um nem para outro lado: fórma dois ângulos iguaes, chamados *ângulos rectos*, e o ponto de encontro das duas é chamado *traço da perpendicular* (1).

Angulo recto, pois, é o que tem os lados perpendiculares entre si.

Todos os ângulos rectos são iguaes, cada um dêles valendo 90°, a quarta parte da circunferência ou de 360°, ou ainda um *quadrante*.

Uma recta é *oblíqua* a outra, quando caindo sobre esta se inclina mais para um que para outro lado: fórma dois

(1)—*Pé da perpendicular*, como dizem os compêndios actuaes, é galicismo de frase: pode muito bem ser substituido por *traço* da perpendicular, de geometria descritiva, termo puro, perfeitamente cabivel no caso.

ângulos desiguaes, o menor chamado *agudo* e o maior, *obtuso*. A soma desses dois ângulos é sempre igual a dois rectos, ou 180°.

Angulo agudo, pois, é o ângulo menor que o recto: vale menos de noventa gráus; *ângulo obtuso* é o maior que o recto: vale mais de noventa e menos de cento e oitenta gráus.

Angulos adjacentes são os que têm um lado comum, ambos com o mesmo vértice.

Angulos complementares são os que somados dão 90°, ou um ângulo recto.

Angulos suplementares são aquêles cuja soma é igual a 180°, ou a dois ângulos rectos.

Complemento de um ângulo é o que lhe falta para completar 90°: o complemento do ângulo de 25° 25' vem a ser o ângulo de 64° 35'.

Suplemento de um ângulo é o que lhe falta para completar 180°: o suplemento do ângulo de 50° 50' 50" vem a ser o ângulo de 129° 9' 1".

Angulos iguaes têm complementos iguaes e reciprocamente: *ângulos de complementos iguaes, são iguaes.*

Angulos iguaes têm suplementos iguaes, e reciprocamente: *angulos de suplementos iguaes, são iguaes.*

Angulos verticalmente opostos são aquêles cujos lados se formam prolongando os lados do outro. *Angulos verticalmente opostos são iguaes*, por ter o mesmo suplemento.

Bissectriz é a recta que divide o ângulo em duas partes iguaes.

Linha poligonal é a que se compõe de duas ou mais rectas. A linha poligonal é *convexa*, quando salientes todos os seus ângulos; *côncava*, quando com um ou mais ângulos reintrantes.

2—*De duas linhas poligonaes convexas, com os mesmos extremos, uma envolvente e outra envolvida, aquéla é sempre maior que esta*: é proposição axiomática muito importante, ao alcance de todas as vistas.

PERPENDICULARES E OBLÍQUAS:

Teorema: *se de um ponto fóra de uma recta se tiram uma perpendicular e qualquer numero de oblíquas,*

1º—*A perpendicular é mais curta que qualquer das oblíquas*.

3—2º—*Oblíquas que se desviam igualmente do traço da perpendicular, são iguaes;*

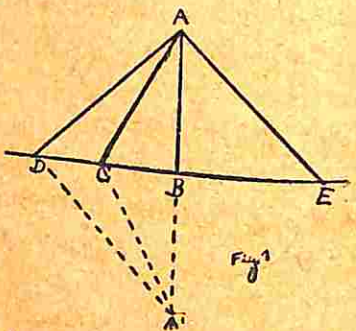
3º—*Das obliquas que se desviam desigualmente do traço da perpendicular, maior é a que mais se desvia* (1).

Seja *DE* a recta dada; *A*, o ponto fóra déla; *AB*, a perpendicular a *DE*; e *AC*, *AD* e *AE*, diferentes oblíquas.

Prolonguemos *AB* até *A'*, de modo que *AB*=*A'B*, e tiremos *CA'* e *DA'*. A recta *ABA'* sendo menor que *ACA'* ou que *ADA'* (2, proposição acima), o mesmo acontecerá com a metade de qualquer dessas linhas: logo *AB*<*AC* ou que *AD*. Isto é:

A menor distância de um ponto á recta é dada pela perpendicular do ponto á recta.

---

(1)—Aug. Comte acha que «o ensino geométrico pode e deve ser feito sistematicamente sem estampas» (pag. 287 da *Sintese*). Não aconselhamos ainda semelhante prática; achamos, porém, que se não deve abusar desse poderoso auxiliar, ás vezes perfeitamente dispensavel. Fazer estampa, para demonstrar, por exemplo, a *lei das faces*, seria mais que ingenuidade geométrica. No presente *volume*, inspirados pelo grande filósofo, restringimos quanto possivel as estampas, assim nos aproximando do genial legislador.

Se *BD* for igual a *BE*, as oblíquas *AD* e *AE* desviam-se igualmente do traço B da perpendicular; e dobrando a figura por *AB*, o ponto *E* cairá em *D*: logo, *AE*=*AD*, unicas linhas com tal regalia. Portanto,

De um ponto para uma recta só se podem traçar duas oblíquas iguaes.

A linha poligonal *ACA'* sendo menor que *ADA'* (2, pag. 14), o mesmo acontecerá ás respectivas metades: logo *DA*>*AC*.

4—Provar-se-ia fácilmente: *qualquer ponto da perpendicular ao meio da recta é equidistante dos extremos desta.*

E recíprocamente: *o ponto equidistante dos extremos de uma recta, pertence á perpendicular ao meio déla.*

Paralélas:

Paralélas são linhas que, estando ao mesmo plano, nunca se encontram, por mais que sejam prolongadas.

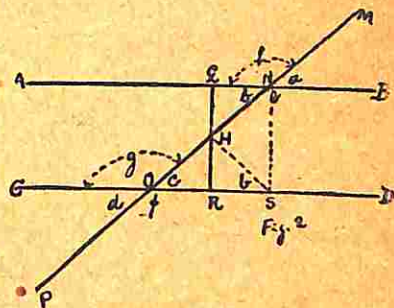
Duas paralélas interceptadas (1) por uma *secante* ou *transversal* formam oito angulos, quatro agudos e iguaes, e quatro obtusos, tambem todos iguaes.

Sejam as paralélas *AB* e *CD* e a secante *MP*. Os 4 ângulos agudos são: *a*, *b*, *c*, *d*; os 4 obtusos: *e*, *f*, *g*, *h*.

Esses oito ângulos são assim chamados:

Alternos-internos são dois ângulos internos, em partes opostas da secante, e não adjacentes: *b* e *c*, e e *g*.

---

(1)—Os compêndios não empregam em tése o termo vernáculo *interceptar*, mas o galicismo *cortar*: duas rectas *cortadas*...

Correspondentes são dois ângulos, um interno e outro externo, do mesmo lado da secante, e não adjacentes: *a* e *c*; *e* e *f*; *h* e *g*; *b* e *d*.

Alternos-externos são dois ângulos externos, em partes opostas de secante, e não adjacentes: *a* e *d*; *h* e *f*.

Internos da mesma parte da secante: *e* e *c*; *b* e *g*.

Externos da mesma parte da secante *a* e *f*; *h* e *d*.

Teorema: *interceptando duas paralélas por uma secante, cinco factos observaremos:*

1º—*Os ângulos alternos-internos são iguaes.* Sejam os ângulos *b* e *c*. Levante-se pelo meio *H* da linha *NO* a perpendicular *QR* e dobre-se a figura pelo meio, por *H*, de modo que AB cáia sobre a paraléla *CD*, o ponto *Q* sobre *R*. Dobrando novamente a figura por *HR*, de modo que *RD* cáia sobre *RC*, o triângulo *QNH* ajustar-se-á perfeitamente com *HRO*, por ser $HN=HO$, e oblíquas iguaes se desviarem igualmente do traço da perpendicular: logo, o ângulo *b* se ajusta perfeitamente com o ângulo *c*, o que só pode acontecer sendo êles iguaes, *c. s. q. d.* (1)

2º—*Os ângulos correspondentes são iguaes.* Sejam os ângulos *a* e *c*. Ora, $a=b$, como verticalmente opostos; e $b=c$, como alternos-internos: logo, $a=c$, porque *duas quantidades iguaes a uma terceira são iguaes entre si.*

3º—*Os angulos alternos-externos são iguaes.* Sejam os ângulos *a* e *d*. O ângulo $a=c$, como correspondentes; e $c=d$, como verticalmente opostos: logo, $a=d$. *c. s q. d.*

4º—*Os ângulos internos da mesma parte são suplementares.*

(1)— *Como se queria demonstrar* escreve-se abreviadamente *c. s. q. d.*

Sabe-se que $b+e=180$; mas $e=o$, como alternos-internos. Fazendo a substituição de *e* por *o* na 1ª igualdade, vem:

$$b+o=180.$$

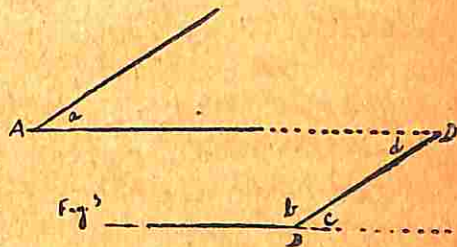
c. s. q. d.

5º—*Os ângulos externos da mesma parte são suplementares.*

Sabe-se que $a+h=180$; porém $h=f$, como alternos-externos. Fazendo a substituição de *h* por *f* na 1ª igualdade, vem, *c. s. q. d.*:

$$a+f=180$$

5—**Teorema:** *ângulos que têm lados paralélos são iguaes ou suplementares: iguaes, se ambos agudos ou obtusos; suplementares, se um agudo e outro obtuso* (1).

Sejam os ângulos *a*, *b* e *c*, de lados paralélos. Prolonguemos estes, até formar o ângulo *d*. Ter-se-á $a=d$, como alternos-internos; e $d=c$, pela mesma razão: logo, $a=c$, ambos agudos. Na figura se vê claramente:

$$b+c=180$$

Mas como $c=a$, como acabamos de mostrar, virá, substituindo *c* por *a* na igualdade anterior:

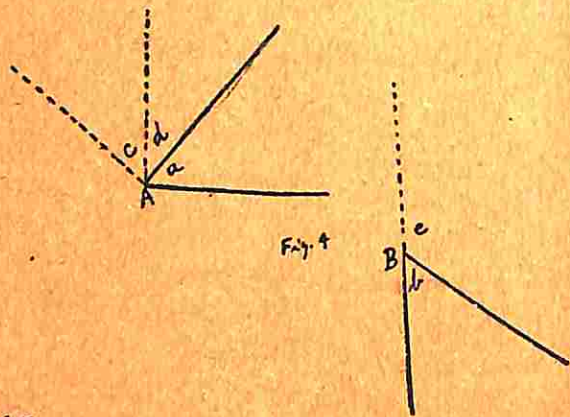
$$b+a=180$$

c. s. q. d.

(1)—Assim enunciado, é o teorema de mais facil percepção. Aberturas voltadas para os mesmos, opostos ou diversos lados, como fazem os livros usuaes causam sempre confusão aos que começam.

Teorema: *ângulos que têm os lados perpendiculares são iguaes ou suplementares: iguaes, se ambos agudos ou obtusos; suplementares, se um agudo e outro obtuso.*

Sejam os ângulos *a* e *b*, com os lados respectivamente perpendiculares.

Serão iguaes, por serem ambos agudos. Com efeito: pelo vértice de *a* tirem-se rectas paralélas aos lados de *b*: ficará formado o ângulo *c*, igual a *b*, por serem os dois agudos e de lados paralélos; mas como $c=a$, por terem o mesmo complemento *d*, segue-se que $a=b$, c. s. q. d.

Considerando os ângulos *a* e *e*, um agudo e outro obtuso, de lados respectivamente perpendiculares, êles serão suplementares. Efectivamente:

$$b+e=180$$

Mas $b=a$, como acabamos de provar. Logo, substituindo *b* por *a* na igualdade anterior:

c. s. q. d. $$a+e=180.$$

NOTAS:

1—Os dois teoremas anteriores podem ter um só enunciado: *angulos de lados paralélos ou perpendiculares são iguaes ou suplementares: iguaes, se ambos agudos ou obtusos; suplementares, se um agudo e outro obtuso.*

2—Tal o enunciado dos compêndios usuaes: *ângulos de lados paralélos ou perpendiculares são iguaes ou suplementares: iguaes, quando as aberturas voltadas para o mesmo ou para lados opostos: suplementares, quando as aberturas voltadas para lados diversos.*

Podemos agora iniciar a teoria da igualdade.

Igualdade dos triângulos:

Triangulo é a figura formada por tres linhas que se interceptam duas a duas.

No triângulo ha 6 elementos: 3 lados e 3 ângulos internos. Os ângulos são denominados A, B e C; e os lados opostos respectivamente, *a*, *b* e *c*. O lado *a* é oposto ao ângulo A; o lado *b*, oposto a B; e o lado *c*, oposto a *C*. A soma dos lados, chamada *perímetro*, é designada por *2p*:

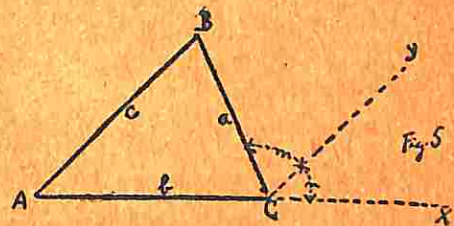
$$a+b+c=2p \text{ ou } \frac{1}{2}(a+b+c)=p$$

Um lado é sempre menor que a soma dos outros dois: o axioma nº 2 da pag. 14 justifica a proposição.

Triângulos iguaes são os que têm lados e ângulos respectivamente iguaes.

A igualdade dos triângulos funda-se na seguinte lei, chamada *lei angular de Thales*:

Proposição fundamental: *a soma dos ângulos internos do triângulo é igual a dois rectos.*

Seja o triângulo ABC. Prolonguemos *AC* e tiremos por *C* a paraléla *CY* ao lado *c*. Os ângulos B e *m* serão iguaes, como alternos-internos; e $A=n$, como correspondentes:

$$B = m$$
$$A = n$$

Somando alternadamente, vem :

$$A + B = m + n \text{ ou } A + B = BCX$$

Isto é : *o ângulo externo é igual á soma dos dois internos não adjacentes*, proposição de contínuo emprego geométrico.

Juntando *C* a ambos os membros da igualdade anterior, vem :

$$A + B + C = BCX + C$$

Mas como $BCX + C = 180$, ter-se-á finalmente, *c. s. q. d.* (1):

$$A + B + C = 180$$

(1)—A proposição fundamental pode ser demonstrada sem o auxilio das paralélas, pelas áreas indefinidas, como determina Aug. Comte :

No triângulo *ABC*, de área *T*, com os lados indefinidamente prolongados, como indica a figura, consideremos o ângulo*C*. Ter-se-á :

$C = T + XAY - ZBY$; $C - T = XAY - ZBY$ . . . (1)

Porém $ZBY = B$, como ângulos verticalmente opostos; e $XAY = 180 - A$. Levando estes dois valores na igualdade (1), vem :

Fig. 6.

$$C - T = 180 - A - B$$

A superficie *T* será tanto menor, quanto menor o triângulo *ABC* : desprezando-a em frente de *C*, que é indefinidamente grande, vem :

$$C = 180 - A - B$$

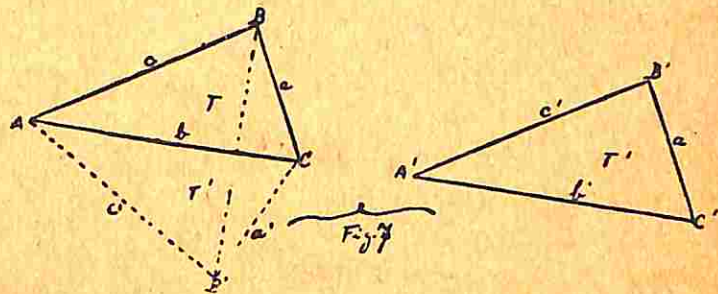
ou, passando $-A-B$ para o 1º membro :

$$A + B + C = 180$$

c. s. q. d.

Ha tres casos distintos de igualdade dos triângulos, conforme ao número de lados que se consideram : no 1º caso entra *um* lado; no 2º entram *dois*; no 3º, *tres* .Vejamo-los, com a devida atenção geométrica.

1º caso : *dois triângulos são iguaes, quando têm um lado igual, adjacente a ângulos respectivamente iguaes.*

Fig. 7

Sejam os triângulos *T* e *T'*, nos quaes se tenham $b = b'$, $A = A'$ e $C = C'$.

Coloque-se o plano de *T* sobre o de *T'*, de modo que *b* se ajuste perfeitamente com seu igual *b'*. Como $A = A'$, o lado *c* tomarà a direcção de *c'*; e como $C = C'$, o lado *a* tomará a direcção de *a'*. O ponto B, devendo se achar ao mesmo tempo sobre B'A' e sobre B'C', cairá sobre B' : então os dois triângulos se ajustam perfeitamente ; logo, são iguaes.

2º caso : *dois triângulos são iguaes, quando têm dois lados iguaes e igual o ângulo por êles formado.*

Sejam os triângulos *T* e *T'*, nos quaes se tenham $a = a$, $b = b'$ e $C = C'$. Coloque-se o plano de *T* sobre o de *T'*, de modo que o ângulo C se ajuste perfeitamente com seu igual *C'*. Como $b = b'$, o ponto A cairá em A' ; e como $a = a'$, o ponto B cairá em B' : os dois triângulos se ajustam perfeitamente ; logo, são iguaes.

3º caso : *dois triângulos são iguaes, quando têm os tres lados respectivamente iguaes.*

Sejam os mesmos triângulos T e T'. Coloque-se um sobre o outro, o lado b sobre o seu igual b', e trace-se a recta BB'. Sendo AB=AB' e CB=CB', os pontos A e C são equidistantes de BB'; portanto a recta AC, que os une, será perpendicular ao meio de BB', (4 pag. 15): e como oblíquas iguaes se desviam igualmente do traço da perpendicular, o ângulo A será igual a A'. Logo, os dois triângulos T e T' são iguaes, por terem um ângulo igual compreendido por lados iguaes.

Igualdade dos triângulos rectângulos:

Triângulo rectângulo é o que têm um ângulo recto. Este é sempre representado pela letra A, sendo B e C os dois ângulos agudos. Nesse caso a hipotenusa será representada por a, sendo b e c os dois catetos.

A lei angular de Thales, para os triângulos rectângulos, simplifica-se bastante:

Isto é: $B+C=90$

Em todo o triângulo rectângulo a soma dos ângulos agudos é igual a 90°.

Os casos de igualdade dos triângulos rectângulos são tambem mais simples.

1° caso: *dois triângulos rectângulos são iguaes, quando têm a hipotenusa igual e tambem um ângulo agudo igual.*

Porque sendo um ângulo agudo igual, o outro se-lo-á tambem, pela lei de Thales, e recáe a questão no 1º caso geral.

2° caso: *dois triângulos rectângulos são iguaes, quando têm os catetos respectivamente iguaes.* Porque os dois catetos sendo respectivamente iguaes, com a igualdade dos ângulos rectos, recáe logo a questão no 2º caso geral.

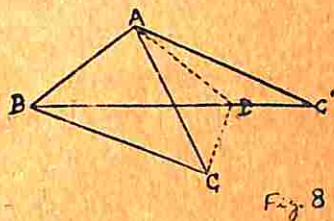
Este 2º caso de igualdade dos triângulos rectângulos pode ainda ser assim formulado: *dois triangulos rectangulos são iguaes, quando têm a hipotenusa igual e tambem um cateto igual.*

Por superposição demonstrar-se-ia facilmente a proposição.

NOÇÕES COMPLEMENTARES:

Teorema: *quando dois triângulos têm dois lados respectivamente iguaes e os ângulos por êles formados desiguaes, os terceiros lados são tambem desiguaes, ao menor ângulo correspondendo menor lado.*

Fig. 8

Sejam os dois triângulos ABC e ABC' com os lados AB e BC respectivamente iguaes a AB e AC', sendo o ângulo BAC menor que BAC': queremos provar ser BC menor que BC'.

Pela figura se vê que a diferença entre esses dois ângulos em A vem a ser CAC'. Tirando a bissectriz AD desse ângulo e tambem a recta CD, ficam formados os dois triângulas iguaes ACD e $AC'D$ (2º caso de igualdade).

Logo, $DC=DC'$. E o triângulo BCD dá:

$$BC<BD+DC,$$

Ou, substituindo DC por seu igual DC':

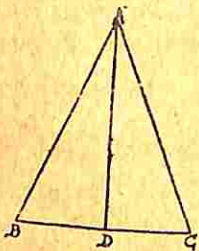
$$BC<BD+DC' \text{ ou } BC<BC',$$

c. s. q. d.

A recíproca do teorema é verdadeira.

Reciproca: *quando dois triângulos têm dois lados respectivamente iguaes e os terceiros lados desiguaes, os ângulos opostos a estes lados serão tambem desiguaes, ao menor lado se opondo menor angulo.*

Teorema: *num triangulo isósceles os ângulos opostos aos lados iguaes são iguaes.*

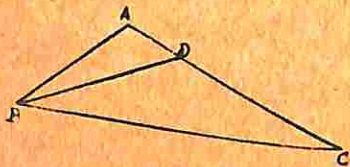
Seja ABC o triângulo isósceles, o lado *AB* igual a *AC*. Tracemos *AD*, do vértice ao meio da base. Os dois trângulos assim formados serão iguaes (3º caso), por terem os tres lados respectivamente iguaes, sendo o ângulo B igual ao ângulo C, como opostos ao mesmo lado. Isto é: *a lados iguaes opõem-se angulos iguaes,* c. s. q. d.

A recíproca é verdadeira.

Recíproca: *se dois ângulos de um triângulo forem iguaes, os lados opostos se-lo-ão tambem.* Isto é: *no mesmo ou em triângulos iguaes, a ângulos iguaes opõem-se lados iguaes.*

Corolário: Do teorema em análise surge a seguinte e interessante consequência: *o triângulo equilátero é equiângulo*; e reciprocamente: *o triângulo equiângulo é equilátero.*

Proposição interessante: *no triangulo isósceles, a recta traçada do vértice ao meio da base é ao mesmo tempo altura, mediana, bissectriz e perpendicular ao meio da base; e toda a recta que gozar de uma qualquer dessas quatro propriedades, gozará tambem das outras tres.*

Teorema: *em qualquer triângulo, a maior ângulo se opõe maior lado.*

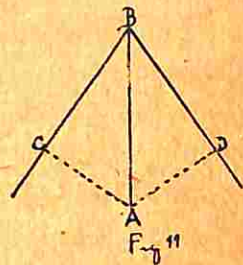
Seja o triângulo ABC, no qual o ângulo em B é maior que o ângulo em C: queremos provar ser AC>AB. Construindo o ângulo DBC igual a DCB, o triângulo BDC será isósceles, sendo então BD=DC. E o triângulo ABD dá:

$$AD+BD>AB$$

Ou, substituindo BD por seu igual DC:

$$AD+DC>AB \text{ ou } AC>AB$$ c. s. q. d.

Recíproca: a recíproca deste teorema é verdadeira: *em qualquer triângulo, a maior lado opõe-se maior ângulo.*

Teorema: *todo o ponto da bissectriz de um ângulo é equidistante dos dois lados.*

Seja A um ponto da bissectriz do ângulo B. As distâncias dêsse ponto aos lados serão as perpendiculares aos mesmos, AC e AD. E os dois triângulos rectângulos assim formados ABC e ADB, serão iguaes, por terem iguaes a hipotenusa e um ângulo agudo (1º caso, pag. 22: logo, CA=AD, c. s. q. d.

Recíproca: a recíproca é verdadeira: *todo o ponto equidistante dos dois lados de um ângulo, pertence á bissectriz do mesmo.*

PROPOSIÇÕES INTERESSANTES:

I — *A bissectriz de um angulo é a imagem geometrica* (1) *dos pontos equidistantes dos dois lados do mesmo.*

II — *Em triangulos iguaes, a lados iguaes opõem-se ângulos iguaes.*

III — *Em tringulos iguaes, a ângulos iguaes opõem-se lados iguaes.*

(1) — Os compêndios de geometria dizem *logar geometrico* todos êles Mas para fugir ao galicismo escrevemos *imagem geometrica.*

Nota—O 4º caso de igualdade triangular dos livros usuaes: *dois triangulos são iguaes, quando têm dois lados iguaes e igual o ângulo oposto ao maior dêles,* não tem fundamento scientífico que o ampare: recáe sem trabalho nos casos já analisados. Palavras de Aug. Comte, na pagina 285 da *Sinthese*: *as figuras rectilíneas não poderão comportar senão tres relações distintas entre os respectivos lados e ângulos.* Foi justamente o preceito geométrico que buscámos seguir práticamente.

Igualdade dos polígonos:

Polígono é a figura formada por linhas rectas que se interceptam duas a duas.

O polígono é composto de *lados* e de *ângulos*, o número dêstes sempre igual ao daqueles. O número de lados do polígono é representado por *n*.

O polígono de 3 lados chama-se *triângulo*; o de 4 lados, *quadrilátero*; o de 5, *pentágono*; o de 6, *hexágono*; o de 7, *heptágono*; o de 8, *octógono*; o de 9, *eneágono*; o de 10, *decágono*; o de 11, *undecágono*; o de 12, *dodecágono*; o de 15, *pentadecágono*; o de 20, *icoságono*. Os mais não têm nome particular.

Polígono convexo é o que só tem ângulos salientes; *côncavo*, o que tem um ou mais ângulos reintrantes.

Polígono equiângulo é o que tem todos os ângulos iguaes.

Polígono equilátero é o que tem todos os lados iguaes.

Polígono regular é o que tem todos os lados e todos os ângulos iguaes.

O quadrilátero regular chama-se *quadrado*.

Diagonal de um polígono é a linha que une dois vértices não consecutivos. O polígono tem tantas diagonaes quantas as unidades contidas na fórmula:

$$d = \frac{n\ (n-3)}{2}$$

Raio de um polígono é a distância do centro a um vértice. O raio é representado pela letra *r*.

Apotêma de um polígono é a distancia do centro a um dos lados. O apotêma é representado por *a* (1).

Perímetro é a soma dos lados do polígono. O perímetro de um polígono é representado por *P*.

Num polígono, um lado é sempre menor que a soma dos outros. Isso decorre naturalmente da proposição 2 da pag. 14.

Angulo externo de um polígono é o ângulo formado por um lado com o prolongamento do outro. O numero dos ângulos externos de um polígono é sempre igual ao dos seus ângulos internos.

Paralelogramo é o quadrilátero cujos lados opostos são paralelos e iguaes.

Losango é o paralelogramo cujos lados são todos iguaes.

Rectângulo é o quadrilátero cujos ângulos são todos rectos.

Quadrado é o rectângulo cujos lados são todos iguaes: é o quadrilátero regular, porque todos os ângulos e lados são iguaes.

Trapézio é o quadrilátero que tem dois lados paralelos.

Com o auxílio da igualdade triangular, é facil demonstrar as seguintes proposições:

1ª—*Todo o quadrilátero de lados opostos iguaes é paralelogramo.*

---

(1)—**Muita gente pronuncia *apótema*, quando a verdadeira pronuncia é *apotêma*: o vocabulo é paroxítono e não proparoxítono.**

2ª—*Todo o quadrilátero de ângulos opostos iguaes é paralelogramo.*

3ª—*Todo o quadrilátero de dois lados opostos iguaes e paralelos, é paralelogramo.*

4ª—*As diagonaes do paralelogramo interceptam-se ao meio.*

5ª—*Todo o quadrilátero cujas diagonaes se interceptam ao meio, é paralelogramo.*

6ª—*As diagonaes do losango interceptam-se em ângulo recto.*

7ª—*As diagonaes do rectângulo são iguaes.*

8ª—*As diagonaes do quadrado são iguaes, interceptam-se ao meio e em ângulo recto.*

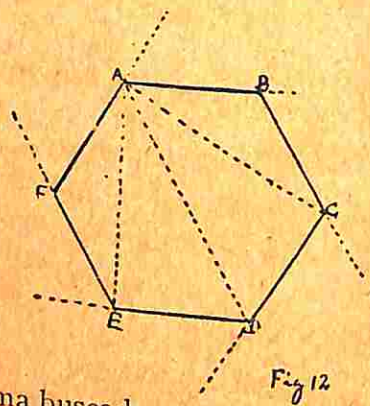
Lei dos ângulos: *a soma dos ângulos internos de um polígono é tantas vezes dois rectos quantos os lados menos dois.*

Seja o polígono *ABCDEF*. Traçando as diagonaes do vértice *A*, fica êle dividido em quatro triângulos, isto é, em $n-2$ triângulos. E como em cada um destes a soma dos ângulos internos é igual a dois rectos (pag. 19), segue-se que a soma total dos ângulos do polígono será $2(n-2)$ rectos, ou, efectuando a multiplicação e chamando S_i a soma buscada:

Fig 12

$$S_i=(2\,n-2);\ S_i=2\,n-4 \qquad (1)$$

Se o polígono for quadrilátero, $n=4$, e $S_i=2.4-4$ ou 4 rectos. E se o quadrilátero for equiângulo, cada ângulo valerá um recto ou 90º.

1º corolário: *se dois ângulos de um quadrilátero forem suplementares, os outros dois se-lo-ão tambem:* porque a soma dos quatro ângulos tem que ser 4 rectos.

2º corolário: *a soma dos ângulos externos de um polígono é igual a 4 rectos.*

Prolongando os lados do polígono anterior, vê-se claramente que cada ângulo interno, somado ao externo adjacente, dá 2 rectos. E como se tem *n* ângulos, segue-se que a soma total dos ângulos internos e externos será $2n$ rectos. Portanto, chamando S_e a soma dos ângulos externos e S_i a dos internos, virá:

$$S_e+S_i=2n\,;\ S_e=2n-S_i$$

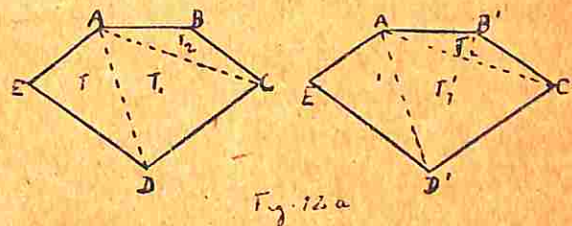
Ou, substituindo S_i por seu valor, dado pela igualdade (1) da pagina anterior, e fazendo o calculo:

$$S_e=2n-(2n-4)=2n-2n+4=4 \text{ rectos.}$$

Igualdade dos polígonos: dois polígonos são iguaes, quando se podem decompôr no mesmo numero de triângulos iguaes e semelhantemente dispostos: porque assim êles se poderão superpôr perfeitamente, o que lhes atesta a igualdade.

Pintando as figuras, chegar-se-á sem trabalho á mesma conclusão.

Sejam os polígonos *ABCDE* e *A'B'C'D'E'*, tendo iguaes os triângulos *T* e *T'*, T_1 e T_1', T_2 e T_2': queremos provar a igualdade dêles dois, isto é, a igualdade dos respectivos lados e ângulos.

Fig. 12 a

Se $T=T'$, $T_1=T_1'$, $T_2=T_2'$, ter-se-á:

$AE=A'E'$; $ED=E'D'$; $DC=D'C'$; $CB=C'B'$; $AB=A'B'$

$AED=A'E'D'$; $ABC=A'B'C'$; $\begin{cases} EDA=E'D'A' \\ ADC=A'D'C' \end{cases}$ $\begin{cases} ACD=A'C'D' \\ ACB=A'C'B' \end{cases}$ $\begin{cases} EAD=E'A'D' \\ DAC=D'A'C' \\ CAB=C'A'B' \end{cases}$

Somando estes tres últimos grupos de igualdades, vem:

$EDA+ADC=E'D'A'+A'D'C'$ ou $EDC=E'D'C'$

$ACD+ACB=A'C'D'+A'C'B'$ ou $DCB=D'C'B'$

$EAD+DAC+CAB=E'A'D'+D'A'C'+C'A'B'$ ou $EAB=E'A'B'$

Isto é: os polígonos dados têm lados e ângulos respectivamente iguaes; logo, são iguaes.

Exercicios interessantes:

1— Achar o complemento do ângulo de 30° 31′ 32″

2— Achar o suplemento do ângulo de 70° 30′ 25″

3— Achar o valor do ângulo igual ao triplo do respectivo complemento.

4—Achar o valor do ângulo igual á 5ª parte do respectivo suplemento.

5—Achar o numero de gráus do ângulo feito pelos ponteiros de um relogio, ás 9 da manhã e ás 4 da tarde.

6—Sendo o complemento de um ângulo igual ao terço do respectivo suplemento, determinar-lhe o valor.

7—Provar que são iguaes os ângulos feitos pela base de um triângulo isósceles com o prolongamento dos lados iguaes.

8— No triângulo rectângulo isósceles, qual o valor dos ângulos agudos?

9—Um ângulo de certo triângulo é igual a 50°: achar o valor dos outros dois, sabendo ser um o dobro do outro.

10—Determinar o numero de lados de um polígono, sabendo que a soma dos ângulos internos é o duplo da soma dos ângulos externos.

11—Provar que são perpendiculares as bissetrizes de dois ângulos adjacentes suplementares.

12—Provar que as linhas que unem os meios dos lados de um triângulo, dividem êste em quatro triângulos iguaes.

13—Provar que são iguaes as bissetrizes dos ângulos da base, no triângulo isósceles.

14—Provar que são iguaes as perpendiculares do meio da base do triângulo isósceles para os outros dois lados.

15—Provar que são iguaes as diagonaes do trapézio simetrico ou isósceles.

Medida angular

Noções fundamentaes: estudo da circunferência e do círculo

Definições:

Circunferência é a curva plana fechada cujos pontos são equidistantes de um outro interior, chamado *centro*.

Circulo é a porção de área limitada pela circunferência. Na prática geométrica confunde-se quasi sempre a circunferência, que é linha, com o círculo, que é área ou superfície.

Raio é a linha que vai do centro á circunferência. *Todos os raios da mesma circunferência são iguaes*, sempre representados pela letra *r*.

Arco é qualquer porção da circunferência.

Corda é a linha que liga as extremidades de um arco.

Flexa é a perpendicular ao meio da corda.

Diâmetro é a corda que passa pelo centro da circunferência. O diâmetro é o dobro do raio, e divide a circunferência e o circulo em duas partes iguaes. *Todos os diâmetros do mesmo circulo são iguaes.*

Semi-circunferência é a metade da circunferência; *semi-circulo*, a metade do circulo.

Quadrante é a quarta parte da circunferência: a circunferência, então, tem 4 quadrantes iguaes.

Tangente é a recta que toca a circunferência num único ponto. Esse ponto é chamado *de tangência* ou *de contacto.*

Normal é a perpendicular á tangente no ponto de contacto.

Secante é a recta que intercepta a circunferência em dois pontos.

Angulo central é o que tem o vértice no centro da circunferência, sendo raios os respectivos lados.

Angulo inscrito é o que tem o vértice sobre a circunferência, sendo cordas os respectivos lados.

Segmento circular é a porção do círculo compreendida entre o arco e a respectiva corda.

Angulo do segmento é o formado por tangente e corda.

Sector circular é a porção do círculo compreendida entre o arco e os dois raios extremos. Quando os dois raios se confundem numa linha única—o diâmetro, o sector se confunde com o semi-círculo.

Circunferências concêntricas são as que têm o mesmo centro. E o espaço compreendido entre elas duas chama-se *corôa.*

Circunferências tangentes são as que se tocam em um só ponto, o de contacto.

Circunferências secantes são os que se interceptam em dois pontos.

Linha dos centros é a recta que une os centros de duas circunferências.

Polígono inscrito é aquele cujos lados são cordas; *circunscrito*, aquele cujos lados são tangentes á circunferência.

Circunferências iguaes são as que têm o mesmo raio ou o mesmo diâmetro: elas superpor-se-ão perfeitamente.

PROPOSIÇÕES IMPORTANTES :

Teorema : *a linha recta não pode encontrar a circunferência em mais de dois pontos* : porque se pudesse encontrar em mais, em 3, por exemplo, as distâncias deles tres ao centro seriam iguaes, como raios do mesmo círculo. Poder-se-ia então de um ponto tirar para uma recta tres linhas iguaes, facto geométricamente impossivel (pag. 15).

Teorema : *o diâmetro é a maior corda do círculo.*

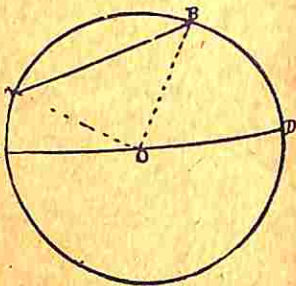
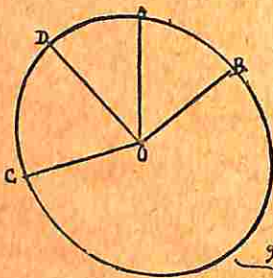
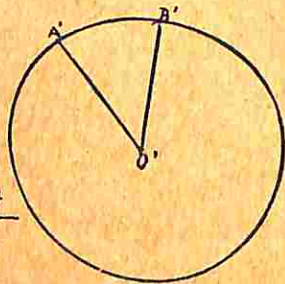
Seja a corda *AB* e o diâmetro *CD*. Tracemos os raios *AO* e *BO*. No triângulo *ABO*,

$$AO + OB > AB$$

Mas como AO+OB vem a ser igual ao diâmetro, segue-se ser êste maior que a corda considerada, ou que outra qualquer.

Fig 13

Teorema : *no mesmo círculo ou em círculos iguaes, a ângulos centraes iguaes correspondem arcos iguaes : a maior ângulo, maior arco.*

Sejam os círculos O e O', nos quaes $AOB = A'O'B'$: queremos provar ser o arco *AB* igual ao arco *A'B'*.

Superpondo os dois círculos, de modo que o centro *O*, caia em O' e o ângulo *AOB* em *A'O'B'*, o ponto *A* cairá em *A'* por ser o raio *AO* igual ao raio *A'O'*, o mesmo acontecendo ao ponto B : logo arco *AB* igual a arco *A'B'*, *c. s. q. d.*

Sejam agora os mesmos círculos *O* e *O'*, nos quaes $AOC > A'O'B'$: queremos provar ser o arco *AC* maior que *A'B'*. Fazendo o ângulo $AOD = A'O'B'$, o arco *AD* será igual a A'B' e o arco AC será visivelmente maior, *c. s. q. d.*

Recíproca : *no mesmo círculo ou em círculos iguaes, a arcos iguaes correspondem ângulos centraes iguaes : a maior arco, maior ângulo.*

Teorema : *no mesmo círculo ou em círculos iguaes, a arcos iguaes correspondem cordas iguaes : a maior arco, maior corda.*

Sejam os dois circulos *O* e *O'* (1), figura anterior, nos quaes o arco AB igual ao arco A'B' : queremos provar ser a corda AB igual a A'B'.

Os dois arcos sendo iguaes, os ângulos centraes correspondentes se-lo-ão tambem : portanto os triângulos AOB e A'O'B' serão iguaes (2° caso), por terem dois lados iguaes e tambem igual o ângulo por êles formado. E como a ângulos iguaes se opõem lados iguaes (pag. 24), segue-se que, $AB = A'B'$, *c. s. q. d.*

Sejam agora os mesmos círculos *O* e *O'*, nos quaes arco AC maior que A'B' : queremos provar ser corda AC maior que A'B'. Os dois arcos sendo desiguaes, o ângulo central AOC será maior que A'O'B'. Assim, os dois triângulos AOC e A'O'B' têm dois lados respectivamente iguaes e os ângulos por êles compreendidos diferentes : $AOC > A'O'B'$. Os terceiros lados serão portanto desiguaes (pag. 23), ao maior ângulo correspondendo maior lado. Logo, $AC > A'B'$, *c. s. q. d.*

(1)— De proposito omitimos a reproducção da figura e deixamos de tirar as respectivas cordas: o leitor que se vá habituando a essas fundamentaes abstrações.

Reciproca: *no mesmo circulo ou em circulos iguaes, cordas iguaes subentendem arcos iguaes: maior corda, maior arco.*

Teorema: *o raio perpendicular á corda divide esta e o arco em duas partes iguaes.*

Seja o raio OD, perpendicular á corda AB. Tracemos os raios OA e OB e as cordas DA e DB. Relativamente a AB, OA e OB são obliquas iguaes, que se desviam, portanto, igualmente do traço da perpendicular: logo AC=BC. As cordas DA e DB são tambem obliquas que se desviam igualmente do traço da perpendicular: logo são iguaes, sendo iguaes tambem os arcos correspondentes, c. s. q. d.

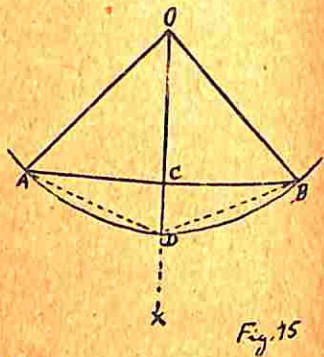



Fig. 15

1º Corolário: *o centro O do circulo, o meio C da corda e o meio D do arco estão na mesma linha recta, que é a perpendicular à corda.* E toda a recta determinada por duas quaesquer dessas condições satisfarà tambem a 3ª.: *a perpendicular ao meio da corda passa pelo centro e divide o arco em partes iguaes.*

2º corolário: *para dividir um arco em duas partes iguaes, basta levantar a perpendicular ao meio da corda respectiva.*

3º corolário: a perpendicular indefinida *OX*, figura anterior, ao meio da recta AB é a imagem geométrica (1) dos centros das circunferências que passam pelas extremidades dessa recta.

Teorema: *por tres pontos não em linha recta só se pode fazer passar uma circunferência.*

(1)—Diz-se *imagem geométrica*, para fugir ao galicismo usual *logar geométrico.*

Sejam A, B e C os tres pontos dados: queremos provar que ha um só ponto equidistante dêles 3. Liguemos o ponto A ao ponto B e êste ao ponto C, e levantemos perpendiculares ao meio de AB e de BC, as quaes se encontram no ponto O. Este ponto, pertencendo a OD, é equidistante de A e B; e, pertencendo a OE, é equidistante de B e C: logo o ponto O é equidistante dos 3 pontos dados, sendo então centro da circunferência que passar por êles 3. A circunferencia que passar por êles devendo ter o centro em DO e em EO ao mesmo tempo, só pode ser em O, único ponto de encontro dessas duas rectas.

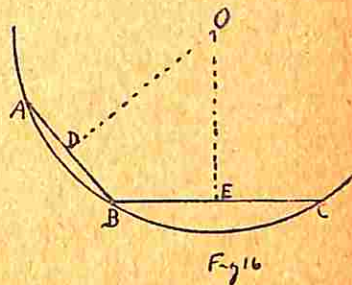



Fig. 16

1º corolário: *duas circunferências só se podem interceptar em dois pontos.*

2º corolário: para achar o centro do arco ABC traçam-se duas cordas nesse arco, sobre as quaes se levantam perpendiculares ao meio: o ponto de encontro será o centro.

3º corolário: *as perpendiculares ao meio dos lados do triângulo concorrem num ponto, centro do círculo circunscrito ao mesmo.*

Teorema: *no mesmo círculo ou em círculos iguaes, cordas iguaes afastam-se igualmente do centro: das cordas desiguaes, maior a que menos se afasta.*

Sejam AB e CD duas cordas iguaes: queremos provar ser OE=OF, distâncias do centro a elas duas. Os pontos

E e F serão meios das cordas repectivas, e como estas são iguaes, suas metades tambem o serão: logo, AE=CF. E os triângulos rectângulos AEO e COF serão iguaes, por terem iguaes hipotenusa e um cateto. Portanto, os 3os lados serão tambem iguaes, isto é, OE=OF, *c. s. q. d.*

Fig 17

Seja agora a corda AB<CG, sendo OE e OH as respectivas distâncias ao centro. O arco AB será menor que CDG (pag. 34).

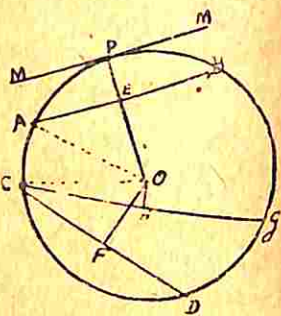
Tomando neste uma parte CD, igual a AB, a corda CD se achará no segmento CDG. A perpendicular OH sendo menor que a oblíqua OI, será com mais forte razão menor que OF, ou que sua igual OE, *c. s. q. d.* (1).

Reciproca: *no mesmo circulo ou em circulos iguaes, cordas igualmente afastadas do centro são iguaes; das afastadas desigualmente, maior a que menos se afasta.*

Teorema: *a tangente é perpendicular ao raio no ponto de contacto.*

Seja OP o raio, tirado no ponto P de contacto, figura anterior, da tangente MM. Qualquer outro ponto de MM, a não ser P, estando fora da circunferência, será maior que OP: então esta será a menor distância de O á tangente, isto é, ser-lhe-á perpendicular.

Reciproca: *a perpendicular ao raio no ponto de contacto é tangente á circunferência.*

(1)—O ponto I, que se não vê na figura, é o encontro da recta *OF* com a recta CG.

Teorema: *arcos compreendidos entre cordas paralelas, são iguaes.*

Sejam os arcos AB e CD, compreendidos entre duas cordas paralelas. Tracemos o raio OE, perpendicular ás ditas paralelas: o ponto E será o meio do arco BED e do arco AEC. Isto é: arco BAE=ECD e arco AE=EC, ou subtraindo ordenadamente, arco AB=CD, *c. s. q. d.*

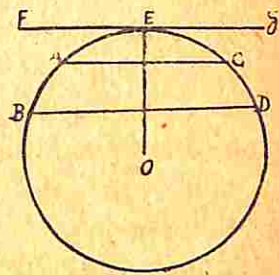



Fig. 18

1° corolário: se a corda for paralela á tangente FG, ter-se-á a mesma relação: BAE=ECD.

2° corolário: *se duas tangentes forem paralelas, os raios respectivos aos pontos de contacto estarão em linha recta, ficando a circunferência dividida em duas partes iguaes.*

Teorema: *se duas circunferências têm um ponto comum fora da linha dos centros, elas terão um outro ponto comum, simétrico do primeiro* (1).

Sejam C e C′ os centros de duas circunferências e A um ponto comum, fora da linha dos centros CC′. Tracemos AA′ perpendicular a CC′ e façamos DA=DA′: queremos provar que A′, simétrico de A relativamente a CC′, é comum ás duas circunferências.

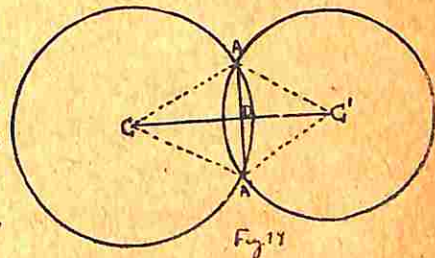



Fig 19

Tracemos as linhas CA, CA′, AC′ e C′A′: CC′ será perpendicular ao meio de AA′. E como o ponto da perpendicular ao

(1)—Dois pontos são simétricos relativamente a uma recta, quando esta perpendicular ao meio da linha que os unir.

meio de uma recta é equidistante dos extremos desta, CA'=CA, raios da 1ª circunferência, e C'A=C'A', raios da outra circunferência. Portanto o ponto A' pertence a ellas duas.

1º corolário: *se duas circunferências se cruzam, a linha dos centros é. menor que a soma dos raios e maior que sua diferença:* porque, nesse caso, possivel a construcção do triângulo, tendo por lados os dois raios e a linha dos centros, e em todo o triângulo um lado é maior que a soma dos outros dois e menor que a respectiva diferença.

2º corolário: *quando duas circunferências se interceptam, a linha dos centros é perpendicular ao meio da corda comum:* porque cada centro é equidistante das extremidades da corda.

3º corolário: *se duas circunferências são tangentes, o ponto de contacto estará sobre a linha dos centros.* Se estivesse fora, haveria um outro ponto comum, simétrico do 1º, sendo então secantes as duas circunferências.

4º corolário: *se duas circunferências são tangentes, a perpendicular á linha dos centros no ponto de contacto será tangente comum a ellas duas: porque essa linha é perpendicular ao extremo de cada um dos raios.*

5º corolario: *duas circunferências podem ocupar cinco diferentes posições, uma relativa á outra:*

1ª—*exteriores:* então a linha dos centros é maior que a soma dos raios: $d>r+r'$.

2ª—*tangentes exteriormente:* então, a linha dos centros é igual a soma dos raios: $d=r+r'$.

3ª—*secantes:* então a linha dos centros estará comprehendida entre a soma e a differença dos raios: $r+r'>d>r-r'$.

4ª—*tangentes interiormente:* então, a linha dos centros é igual á diferença dos raios: $d=r-r'$.

5ª—*inferiores:* então, a linha dos centros é menor que a diferença dos raios: $d<r-r'$

Medida dos ângulos:

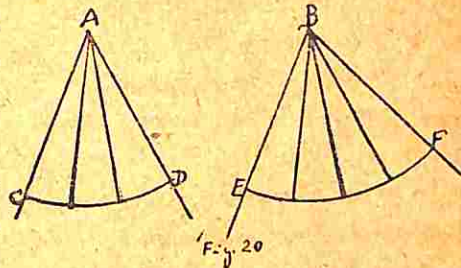
Medir um ângulo é determinar-lhe a relação numérica com outro tomado por unidade; é fixar-lhe a grandeza numérica.

Na medida dos ângulos emprega-se como unidade o ângulo recto, ou então o ângulo de um gráu.

Medir um arco é determinar-lhe a relação numérica com um outro arco tomado por unidade.

Na medida dos arcos a unidade é o quadrante ou o arco de um gráu. O arco do quadrante é a quarta parte da circunferência; e como esta vale 360º, o arco do quadrante valerá 4 vezes menos, ou 90º. O arco de um gráu valerá a a 90ª parte de um quadrante.

Teorema: *dois angulos quaesquer estão entre si como os arcos respectivos, traçados do vértice de cada um, com o mesmo raio.*

Sejam *A* e *B* dois ângulos e *CD* e *EF* os respectivos arcos, traçados com o mesmo raio $AC=r$. Suponhamos certa medida comum contida 3 vezes no arco *CD* e 4 vezes em *EF*. Então

$$\frac{\widehat{CD}}{\widehat{EF}}=\frac{3}{4}$$

Unindo o vértice *A* ás divisões de *CD* e o vértice *B* ás de *EF*, os arcos parciaes sendo iguaes, determinarão tambem ângulos centraes iguaes. Isto é:

$$\frac{CAD}{EBF}=\frac{3}{4}$$

E, comparando esta com a proporção anterior :

$$\frac{CAD}{EBF}=\frac{CD}{EF},$$

c. s. q. d.

Corolário : *o ângulo central está para o ângulo recto, como o arco compreendido entre os seus lados, para o quadrante.*

Teorema : *o ângulo central tem por medida o arco compreendido entre seus lados.*

Seja o ângulo central *CAD* da figura anterior. Ele estará para o ângulo unidade, como o arco respectivo para o arco unidade. Isto é :

$$\frac{\text{ângulo central}}{\text{ângulo unidade}}=\frac{\text{arco respectivo}}{\text{arco unidade}} \quad \text{ou} \quad \frac{\text{ângulo central}}{1}=\frac{\text{arco}}{1}$$

ou

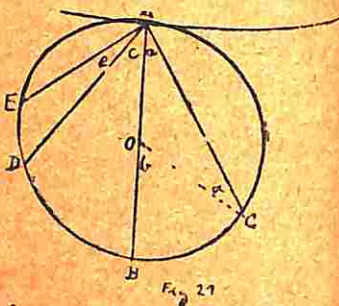
$$\text{ângulo central}=\text{arco},$$

ou, finalmente : *o ângulo central tem por medida o arco compreendido entre seus lados.*

Teorema : *o ângulo inscrito tem por medida a metade do arco compreendido entre seus lados.*

Seja em primeiro logar o ângulo *BAC=a*, com o centro sobre um dos lados. Unindo O a C, fica formado o triângulo *AOC*, cujo ângulo externo *b* é igual á soma dos dois internos não adjacentes. Mas esses dois ângulos são iguaes, por ser isósceles o triângulo, isto é, por ser OA=OC, como raios do mesmo circulo. Então,

Fig. 21

$$b=a+a \text{ ou } b=2a, \; a=\frac{b}{2}.$$

Mas o ângulo *b*, que é central, tem por medida o arco compreendido entre seus lados. Logo,

$$a=\frac{\widehat{BC}}{2},$$

c. s. q. d.

Se considerarmos o ângulo DAC=d, com o centro entre os dois lados, chegaremos ao mesmo resultado, por ser d=a+c, ter o ângulo *a* por medida metade do arco BC, e o ângulo c, metade do arco BD. Isto é :

$$d=\frac{1}{2}\widehat{BC}+\frac{1}{2}\widehat{BD}, \text{ ou } d=\frac{1}{2}(BC+BD), \text{ ou } d=\frac{1}{2}CD$$

Considerando finalmente o ângulo *DAE=e*, com o centro fóra, obter-se-á ainda analogo resultado : porque

$$e=BAE-BAD=\frac{1}{2}(BE-BD)=\frac{1}{2}DE$$

1° corolário : *ângulos inscritos no mesmo segmento são iguaes* : porque têm todos êles a mesma medida, metade do arco do segmento oposto.

2° corolário : *o ângulo inscrito no semi-circulo é recto* : porque tem por medida a quarta parte da circunferência, isto é, 90°.

3° corolário : *o ângulo inscrito em segmento maior que o semi-círculo, será agudo ; e inscrito em segmento menor, será obtuso* : porque a medida é sempre metade do segmento oposto.

4° corolário : *ângulos inscritos em dois segmentos determinados pela mesma corda, são suplementares* : porque somados terão por medida metade de circunferência.

Teorema : *o ângulo do segmento* (formado por corda e tangente) *tem por medida metade do arco compreendido entre seus lados.*

Seja o ângulo CAF, figura anterior. Ele será igual a BAF—BAC. Mas o ângulo BAF, que é recto, tem por medida metade da circunferência BCA; e o ângulo inscrito BAC tem por medida metade do arco BC: logo, $CAF = \frac{1}{2}\widehat{BCA} - \frac{1}{2}\widehat{BC} = \frac{1}{2}\widehat{AC}$.

Teorema: *o ângulo com o vértice no interior da circunferência tem por medida a semi-soma dos arcos compreendidos entre seus lados e respectivos prolongamentos.*

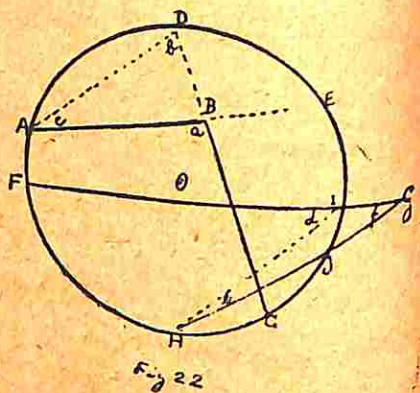
Seja o ângulo ABC=a. Prolonguemos os lados até D e E, e tracemos a corda DA: queremos provar que $a = \frac{1}{2}(\widehat{AC}+\widehat{DE})$. No triângulo ADB o ângulo externo $a=b+c$. Mas como b tem por medida metade de $\widehat{AC}$; e c, metade de $\widehat{DE}$, vem:

Fig 22

$$a = \frac{1}{2}(\widehat{AC}+\widehat{DE}),$$

c. s. q. d.

Teorema: *o ângulo formado por duas secantes que se encontram fora do círculo, tem por medida a semi-diferença dos arcos compreendidos entre seus lados.*

Seja o ângulo $FGH=f$, figura anterior. Traçando a corda HI, fica formado o triângulo GHI, no qual $d=e+f$ ou $f=d-e$. Mas como d tem por medida $\frac{1}{2}\widehat{HF}$ e $e = \frac{1}{2}\widehat{IJ}$,

ter-se-á, fazendo a substituição:

$$f = \frac{1}{2}(\widehat{HF} - \widehat{IJ}),$$

c. s. q. d

Corolário: *o ângulo circunscrito tem por medida a semi-diferença dos arcos compreendidos pelos dois pontos de contacto.*

Teorema: *no quadrilátero inscrito, os ângulos opostos são suplementares.*

Seja ABCD o quadrilátero e A e D os dois ângulos opostos. O ângulo A tem por medida metade do arco BDC e o ângulo D, metade do arco CAB: os dois, metade da circunferência, ou 180°: logo, são suplementares.

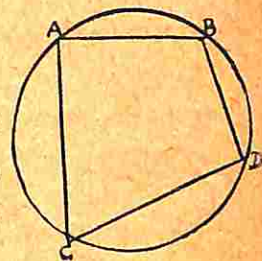



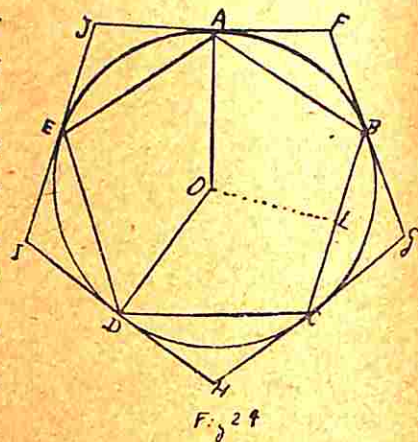
Fig 23

Reciproca: *o quadrilátero que tem dois angulos opostos suplementares, é inscritivel.*

Seja o quadrilátero ABCD, figura anterior, cujos ângulos opostos A e D são suplementares. Fazendo passar por BAC uma circunferência, o ângulo *A* será inscripto, tendo por medida metade do arco BDC. O ângulo D, suplemento de A, terá medida igual á metade do arco restante BAC, o que obriga o ponto D a estar sobre a circunferência.

Teorema: *dividindo a circunferência em certo numero de partes iguaes, as cordas ligando os pontos de divisão formarão poligono regular inscrito.*

Seja a circunferência O, dividida em cinco partes iguaes pelos pontos A, B, C, D, E. Os arcos AB, BC, CD, DE e EA subentendem cordas iguaes, por serem iguaes, tendo portanto o polígono inscrito todos os lados iguaes. Quanto aos ângulos, são tambem todos iguaes, pois cada um tem por medida $\frac{360}{5}$ ou 72º. Logo, o polígono é regular, por ter lados e ângulos iguaes.

Fig 24

Teorema: *dividindo a circunferencia num certo numero de partes iguaes, e traçando tangentes pelos pontos de divisão, o polígono assim formado será regular e circunscrito.*

Seja a circunferência, figura anterior, dividida em 5 partes iguaes pelos pontos A, B, C, D, E. Traçando tangentes por esses pontos, ter-se-á o polígono circunscrito FGHIJ. As cordas AB, BC, CD, DE, EF são iguaes, como subentendendo arcos iguaes. Nos triângulos AFB, BCG, CDH, DEI e EAJ os ângulos em A, B, C, D e E são iguaes, como ângulos de segmento compreendendo arcos iguaes: taes triângulos, então, serão iguaes, como tendo um lado igual adjacente a ângulos respectivamente iguaes (1º caso). Logo, os ângulos em F, G, H, I e J serão iguaes, e tambem os lados FG, GH, HI, IJ e JF, o que torna regular o polígono considerado.

Corolario: *a construcção dos polígonos regulares fica subordinada á divisão da circunferência em certo numero de partes iguaes.*

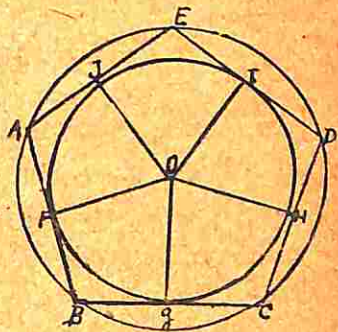
Teorema: *a todo o polígono regular pode-se circunscrever uma circunferência.*

Seja ABCDE, figura anterior, um polígono regular. Façamos passar uma circunferência por A, B e C: queremos provar que ela passará tambem pelos outros vértices do polígono. Tracemos OA e OD e depois OL, perpendicular a BC e suponhamos que o quadrilátero ODCL gira em torno de OL, superpondo-se a OABL. Sendo L o meio de BC, o ponto C cairá em B, coincidindo LC em LB, o ângulo B com C, CD com BA, OA com OD. Isto é: a circunferência, que passava pelas 3 pontos A, B e C, está jà passando por D.

De modo análogo provar-se-ia a passagem por *E*, e assim successivamente.

Teorema: *em todo o polígono regular pode-se inscrever uma circunferência.*

Seja o polígono regular ABCDE. Circunscrevamos a circunferência e tracemos do centro O as perpendiculares OF, OG, OH, OI, OJ. Os lados AB, BC, CD, DE, EA são cordas iguaes, por conseguinte igualmente afastadas do centro. Portanto as perpendiculares OF, OG, OH, OI e OJ são iguaes, e a circunferência traçada com o raio igual a uma delas passará pelos pontos F, G, H, I e J.

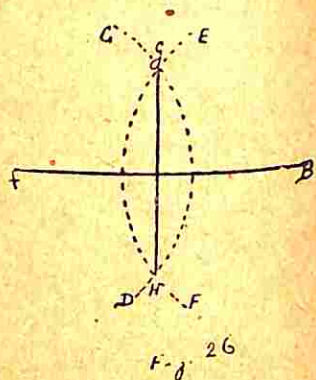
Fig 25

Demais, os lados AB, BC, CD etc., perpendiculares ao extremo do raio, serão tangentes á circunferência, o que importa afirmar ser esta inscrita no polígono considerado.

Havemos de ver no Vol. seguinte, na avaliação real da extensão, que *a circunferência pode ser considerada como polígono regular de numero infinito de lados infinitamente pequenos.*

Problemas sobre as teorias precedentes :

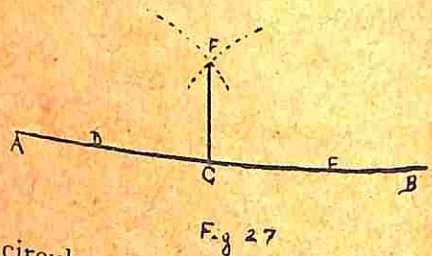
1º problema : *traçar uma perpendicular ao meio de uma recta.*

Seja a recta AB. Faça-se centro em A e com um raio pouco maior que $\frac{AB}{2}$, descreva-se o arco CD. Faça-se centro em B, e com o mesmo raio descreva-se o arco EF ; unam-se os pontos de encontro desses dois arcos : a recta GH será a perpendicular pedida.

Fig. 26

Nota—Repetindo a construcção successivamente sobre cada uma das partes, será a mesma recta dividida em 4, 8, 16 etc. partes iguaes.

2º problema : *por um ponto dado, levantar uma perpendicular a uma recta.*

Seja a recta AB e C o ponto dado. A partir de C, tomem-se as distâncias CD = CE (problema anterior). Faça-se centro em D e com raio pouco maior que CD descreva-se um arco de circulo. Faça-se centro em E, e com o mesmo raio, descreva-se outro arco de círculo; ligue-se o ponto de encontro desses dois arcos ao ponto C : CF será a perpendicular pedida.

Fig. 27

3º problema : *de um ponto dado, baixar uma perpendicular a uma recta.*

Seja AB a recta e C o ponto. Faça-se centro em C e descreva-se um arco que corte AB em dois pontos D e E. Com centro em D e com raio pouco maior que $\frac{DE}{2}$ descreva-se um arco de círculo ; com centro em E, e com o mesmo raio, descreva-se outro arco de círculo, interceptando o 1º no ponto F ; ligue-se esse ponto a C : CF será a perpendicular pedida.

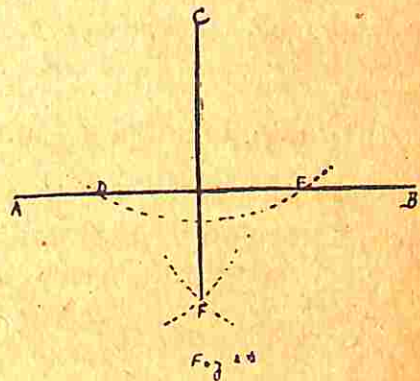



Fig. 28

4º problema : *levantar uma perpendicular ao extremo de uma recta, que não possa ser prolongada.*

Seja a recta AB, cujo extremo B, onde se quer levantar uma perpendicular, não possa ser prolongado. Tome-se um ponto O qualquer e com o raio OB trace-se uma circunferência, que cortará AB no ponto C ; tire-se o diâmetro COD e unam-se os pontos B e D : a recta BD será a desejada.

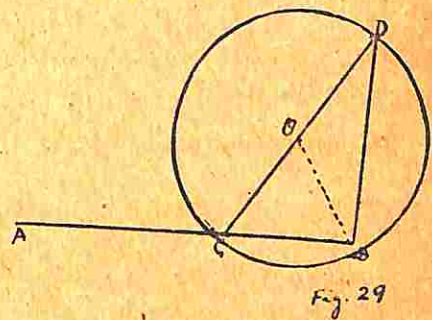
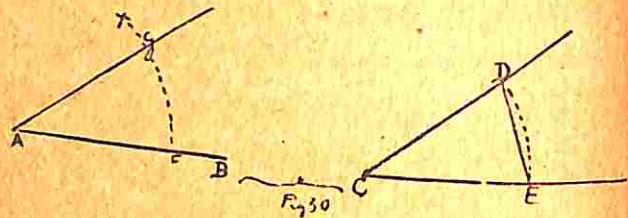



Fig. 29

5º problema : *num ponto de uma recta, construir um ângulo igual a outro dado.*

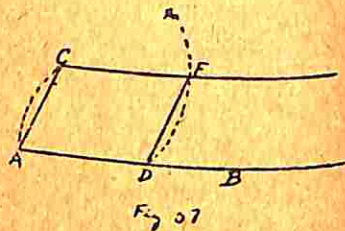
Seja o ponto A da recta AB e o ângulo C. Faça-se centro em C e com um raio qualquer trace-se o arco DE, e

a corda DE. Com centro em A, e com o mesmo raio, descreva-se o

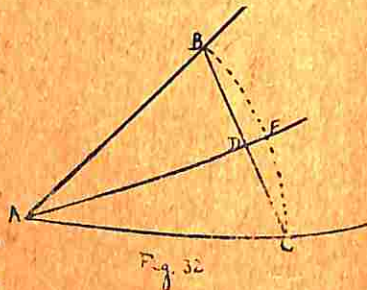
Fig. 30

arco FX, tome-se a corda FG=DE e unam-se os pontos A e G: o ângulo GAF será igual ao ângulo dado.

6° problema: *por um ponto dado, traçar uma paralela a uma recta.*

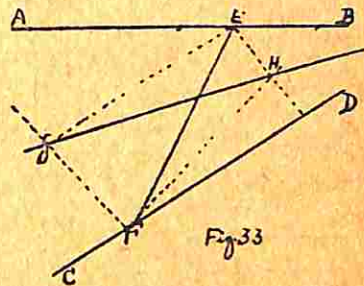
Seja AB a recta e C o ponto. Com centro em C e raio qualquer descreva-se o arco DX; do ponto D, com o mesmo raio, descreva-se o arco CA; faça-se DF=CA e liguem-se os pontos C e F: a recta CF será a paralela desejada.

Fig. 31

7° problema: *dividir um arco ou um ângulo em duas partes iguaes.*

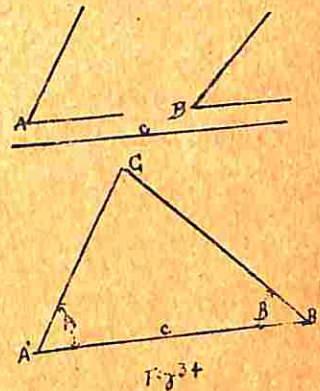
Seja o ângulo BAC ou o arco BC. Levante-se a perpendicular AD, ao meio da corda BC. Ela passará pelo meio E do arco, dividindo o ângulo ao meio.

Fig. 32

8° problema: *traçar a bissectriz do ângulo de duas rectas, sem o auxilio do vértice do ângulo.*

Sejam as rectas AB e CD. Trace-se a transversal EF e as bissectrizes EG, FG, EH e FH e unam-se os pontos G e H: a recta GH será a pedida.

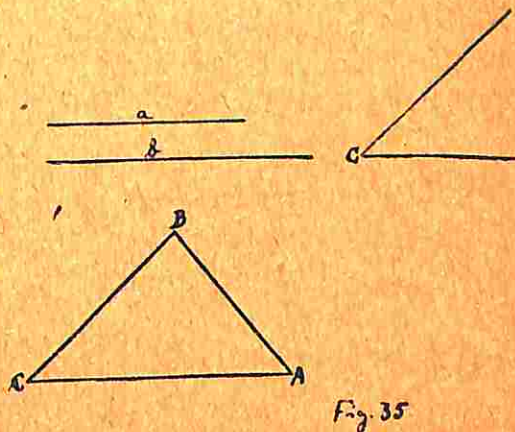
Fig. 33

9° problema: *construir um triângulo, sendo dados um lado e os dois ângulos adjacentes.*

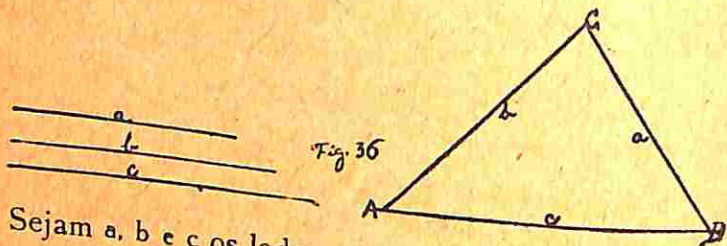
Seja o lado c e os ângulos A e B. Trace-se A'B'=c; no ponto A' construa-se um ângulo igual a A e no ponto B' um outro igual a B: o triângulo A'B'C satisfará a questão.

Fig. 34

Nota—Este problema só é possivel, quando A+B menor que 2 rectos.

10° problema: *construir um triângulo sendo dados dois lados e o ângulo por êles formado.*

Sejam os lados *a* e *b* e o ângulo C. Construa-se o ângulo C'=C, tomando sobre seus lados C'A=b

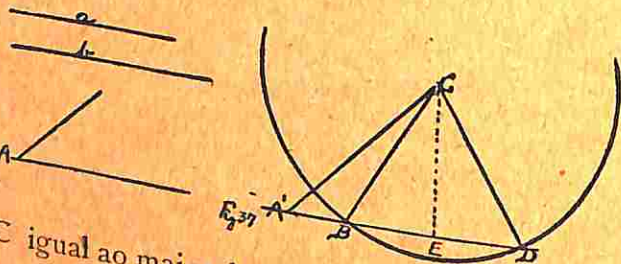
Fig. 35

e C'B=c : o triângulo C'AB será o procurado.

11º problema : *construir um triângulo sendo dados os tres lados.*

Sejam a, b e c os lados.

Trace-se AB=c, o maior dos 3 lados. Com centro em A e com o raio a descreva-se um arco de círculo ; com centro em B e com o raio b descreva-se outro arco ; ligue-se o ponto de encontro dos dois arcos a A e a B : ABC será o triângulo buscado.

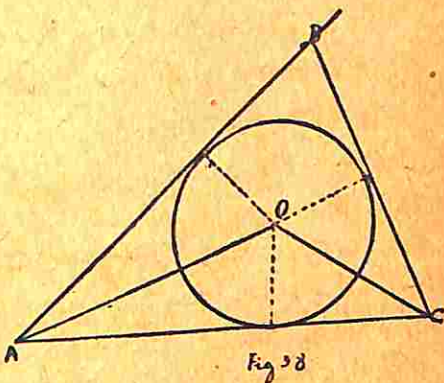
Nota—Este problema será impossivel, quando um lado maior que a soma dos outros dois.

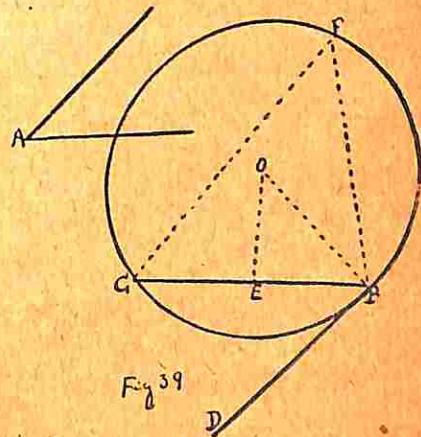
12º problema ; *construir um triângulo sendo dados dois lados e o ângulo oposto a um deles.*

Sejam os lados *a* e *b* e o ângulo *A*. Construa-se o ângulo A'=A.

Tome-se A'C igual ao maior dos dois lados, *b*. Com centro em C e com raio igual a *a*, trace-se uma circunfêrencia, que interceptará o outro lado do ângulo em dois pontos B e D. Unam-se esses pontos a C : teremos assim dois triângulos, ambos satisfazendo á questão dada, A'BC e A'DC.

Nota—Este problema, conhecido pelo nome de *caso incerto*, pode ter as duas soluções dadas, uma só, ou nenhuma: tem uma só, quando *a* igual á perpendicular *h* da figura, sendo a circunferência tangente ao lado *b* ; não haverá solução, quando *a* menor que *h*.

13º problema : *inscrever uma circunferência num triângulo.*

Seja o triângulo ABC. Tracem-se as bissectrizes AO e CO : o ponto de encontro O será o centro da circunferência desejada. A 3ª bissectriz, BO, passaria tambem pelo centro da circunferência, porque *as 3 bissectrizes concorrem em ponto, que é o centro do círculo inscrito no triângulo.*

14º problema : *construir sobre uma recta um segmento capaz de um ângulo dado.*

Seja o ângulo A e a recta BC. Construa-se em B um ângulo CBD igual a A, levante-se a perpendicular a BD no ponto B e a perpendicular ao meio de BC; e do ponto O de encontro dessas duas perpendiculares, com raio igual a OB, descreva-se uma circunferência : CBF será o segmento desejado.

15° problema : *por um ponto fóra de uma circunferência traçar uma tangente á mesma.*

Seja A o ponto e O a circunferência. Sobre AO como diâmetro descreva-se uma circunferência, que interceptará a 1ª nos pontos B e C, pontos de contacto das tangentes AB e AC.

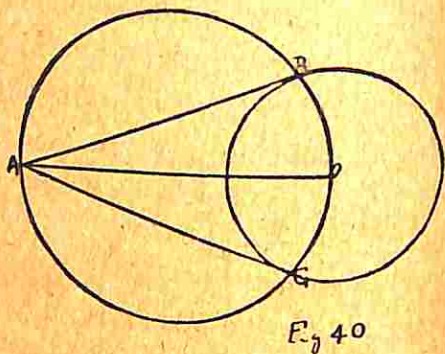



Fig 40

16° problema : *dadas duas circunferências O e O', tirar uma tangente comum.*

Com raio igual á diferença dos raios dados descreva-se a circunferência O'A, á qual se traça a tangente OA. Tracem-se a essa tangente as perpendiculares OB e O'C : BC será a tangente pedida.

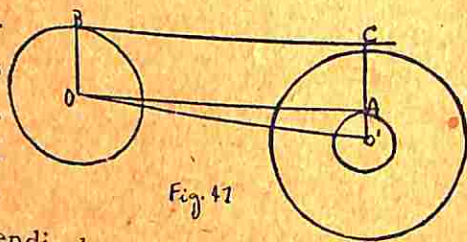



Fig. 41

Exercicios interessantes :

1—Determinar o valor do ângulo inscrito num arco de 40° 40'.

2—Determinar o valor do ângulo agudo circunscrito num arco de 50° 50'.

3—Duas secantes que se cruzam fora do círculo limitam um arco de 16° 16' e um outro de 54° 54' : determinar o valor do ângulo por êles formado.

4—Duas rectas que se encontram dentro do círculo, interceptam a circunferência do mesmo em um arco de

30° 30' e num outro de 80° 20': determinar o valor do ângulo por êles formado.

5—Provar que em todo o quadrilátero circunscrito a um circulo a soma dos lados opostos é igual.

6—Provar que o raio do círculo inscrito num triângulo equilátero é igual á terça parte da altura do dito triângulo.

7—Provar que o raio do círculo circunscrito num triângulo equilátero é igual aos dois terços da respectiva altura.

8—Provar que se forem concêntricos os círculos inscrito e circunscrito a um triângulo, este será equilátero.

9—Provar que o diâmetro do círculo inscrito num triângulo rectângulo é igual á diferença entre a soma dos catetos e a hipotenusa.

10—Achar um ponto x, equidistante de 3 outros.

11—Construir um triângulo equilátero, sendo dado o raio do círculo circunscrito.

12—Construir um rectângulo, sendo dados o perímetro e a diagonal.

13—Construir um losango, dadas as duas diagonaes.

14—Descrever círculos dos tres vértices de um triângulo, de modo que cada um passe por dois vértices.

15—Provar que a linha que une o meio do arco ao meio da corda subentendida, é perpendicular a esta última linha.

16—Provar que a linha que passa pelo meio de duas cordas paralelas, passa tambem pelo centro do círculo.

17—Descrever a posição relativa de dois círculos que tenham internamente duas tangentes comuns.

18—Provar que a linha que vae do centro do círculo ao ponto de intersecção de duas tangentes, é perpendicular á

corda que une os dois pontos de contacto e tambem bissectriz do ângulo formado pelas ditas tangentes.

19—Provar que são suplementares os ângulos opostos de um quadrilátero inscrito.

20—Provar que, se de um ponto qualquer, dentro do círculo, se tiram duas cordas perpendiculares uma á outra, a soma de qualquer par de arcos opostos por elas interceptados é igual a uma semi-circunferência.

21—Provar que a linha que vae do vértice do ângulo recto ao centro do quadrado construido sobre a hipotenusa de um triângulo rectângulo, é bissectriz daquêle mesmo ângulo.

22—Provar que é recto o ângulo BAC, cujo vértice A é o ponto de contacto de dois círculos tangentes e cujos lados passam pelos pontos de contacto de duas tangentes externas, comuns aos ditos círculos.

23—Provar que são iguaes as cordas traçadas perpendicularmente aos extremos de uma outra.

24—Provar que num quadrilátero inscrito a soma dos lados opostos é constante.

25—Provar que o diâmetro do círculo inscrito num triângulo rectângulo é igual á diferença entre a hipotenusa e a soma dos catetos.

26—Construir um triângulo equilátero, sendo dado o perímetro.

27—Dividir uma linha em cinco partes iguaes.

28—De um ponto dado traçar uma linha que forme um triângulo isósceles com os dois lados de um ângulo dado.

29—Dada a altura, construir um triângulo equilátero.

30—Dada a base e tambem a altura, construir um triângulo isósceles.

31—Traçar num círculo uma tangente paralela a uma recta dada.

32—Achar um ponto equidistante de tres outros.

33—Achar um ponto a igual distância de dois outros dados.

34—Construir um triângulo equilátero, sendo dado o raio do círculo circunscrito.

35—Construir um triângulo equilátero, sendo dado o raio do círculo inscrito.

36—Dada a diagonal, construir um quadrado.

37—Dado o ângulo das diagonaes de um rectângulo e um dos lados, construi-lo.

38—Construir um losango, dadas as duas diagonaes.

39—Construir um trapézio isósceles, sendo dadas as bases e a diagonal.

Teoria da igualdade

II

CASO REVERSO

Noção fundamental: o plano é a mais simples de todas as superfícies: representa entre estas o mesmo papel que a recta entre as outras linhas.

Propriedade característica: plano é a superfície sobre a qual se pode aplicar perfeitamente a linha recta, em todas as direcções imagináveis.

Teoria elementar do plano:

Depois do estudo dos conjuntos rectilineos planos, cujos elementos se acham todos num só plano, devemos, em continuação, considerar os conjuntos rectilíneos *reversos* ou poliédricos, cujos elementos se acham em planos diferentes. Isto é: estudado o caso plano, cumpre analisar sensatamente o caso reverso. Para tanto torna-se necessário estabelecer prèviamente, e de modo elementar, a *teoria do plano*, suave passagem geométrica de um para outro caso, em vista da analogia que êle guarda com a linha recta, na medida comum, algébrica ou gráfica, dos conjuntos rectilíneos.

O poliedro sendo um agregado de polígonos planos, e o polígono, como vimos, decompondo-se sempre em triângulos, esta figura, antes o *plano*, passa a ser o elemento pri-

mordial dos sólidos, ou da extensão considerada com todas as dimensões. O estudo elementar do plano, pois, constitue o verdadeiro fundamento do caso reverso em análise.

Tal estudo reduzindo-se aos diferentes modos por que pode ser gerado o plano, cumpre examinar primeiramente a geração das superfícies pelo movimento de uma linha, para lhes dar classificação geométrica racional, ao mesmo tempo fazendo ver que o plano pode surgir como caso particular das superfícies geralmente conhecidas.

Dissemos precedèntemente que, por sucessiva abstração, iamos da extensão em toda sua plenitude ás linhas, que só têm uma dimensão, e mesmo até ao *ponto* geométrico, que não tem dimensão alguma considerável. E tambem frizámos a possibilidade de ir do ponto aos comjuntos reversos, pelo sucessivo movimento do ponto, para o aparecimento das linhas; pelo da linha, para a das superfícies; e pelo da superfície, para o dos sólidos. Por outras palavras: linha é a figura gerada pelo movimento de um ponto; superfície é a imagem gerada pelo movimento de uma linha; volume é o corpo gerado pelo movimento de uma superfície. Em qualquer dos casos a figura que gera recebe o nome de *geratriz*; a linha que determina a lei do movimento, a denominação de *directriz*.

Assim concebidas, as superfícies geométricas distribuem-se logo em duas grandes classes, conforme á natureza geométrica da geratriz e á lei que lhe preside ao movimento: a das que podem ser geradas por uma linha recta e a das que só o podem ser por uma linha curva. As primeiras são as superficies chamadas *rectilíneas* ou *regradas*; as últimas, as superficies *curvas*, das quaes as mais importantes, como

em pouco veremos, são as chamadas *superfícies de revolução.*

Então, *superfície regrada é a gerada pelo movimento de uma linha recta : superficie curva, a gerada pelo movimento de uma linha curva.*

Essas duas grandes classes de superfícies dividem-se em *grupos* naturaes, subdivididos em *familias* varias, das quaes são dignas de mensão, por conterem o plano como caso particular, as chamadas *cilíndricas, cônicas, rectilíneas, circulares* ou de *revolução* e *polares.*

Superfícies cilíndricas :

Cilíndrica é a superficie gerada pelo movimento de uma recta, sempre paralela a si mesma, ao longo de uma linha fixa. Essa linha fixa é a *directriz* da superficie.

As superfícies cilíndricas distinguem-se umas das outras pela natureza geométrica da directriz : esta sendo a circunferência de um círculo, a superfície gerada será o cilindro circular, recto ou oblíquo, conforme á posição da geratriz ; mas se for uma linha recta, surgirá o *plano*, que pode ser definido como *a surperfície cilíndrica cuja directriz é rectilínea.* Esta superfície distingue-se das mais, por ser cilíndrica em uma infinidade de direcções, e ainda por admitir qualquer geratriz, uma vez esta se projectando inteira sobre a respectiva directriz, isto é, tendo apenas movimento de translação.

Síntese : o plano é caso particular das superfícies cilíndricas, podendo ser determinado geométricamente por duas rectas paralelas.

Superfícies cônicas :

Cônica é a superfície gerada pelo movimento de uma recta fixa num ponto, ao longo de certa linha fixa. Tal ponto

fixo recebe o nome de *vértice* do cone. Como as cilíndricas, as superfícies cônicas distinguem-se umas das outras pela natureza geométrica da directriz : se esta for uma circunferência de círculo, a superfície gerada será o cone circular, recto ou oblíquo, conforme a altura for ou não a recta unindo o vértice do cone ao centro da base; se a directriz for linha recta, a superficie gerada será o plano, que pode ser definido como a *superficie cônica cuja directriz é rectilinea.* Esta superfície distingue-se das mais por admitir diversas geratrizes e ainda pela indetermínação do vértice, que pode ficar até na base do cone.

As superfícies cônicas têm duas folhas simétricas, uma acima e outra abaixo do vértice.

Síntese : o plano é caso particular das superfícies cônicas, podendo ser determinado geométricamente por tres pontos não em linha recta, por uma recta e um ponto fora dela, ou ainda por duas rectas que se cruzem.

Superfícies regradas :

Regrada ou *rectilinea* é a superfície gerada pelo movimento de uma recta, ao longo de tres directrizes fixas. As superfícies regradas, como as anteriores, distinguem-se geométricamente umas das outras pela natureza das directrizes : estas sendo linhas rectas não situadas duas a duas no mesmo plano, a superfície gerada será o hiperboloide de uma folha ; se, porém, as tres directrizes se encontrarem duas a duas, a superfície gerada será o plano. Neste caso particular, dispensavel uma das tres directrizes, pois duas delas apenas bastam para completa determinação da superfície gerada.

Síntese : o plano é caso particular das superfícies

regradas, quando as tres directrizes se encontram duas a duas.

Superficies de revolução:

Superfícies de revolução ou *circulares* são as geradas pela rotação de uma linha em torno de um eixo fixo. Cada ponto da geratriz, nestas superfícies, gera uma circunferência de círculo cujo centro se acha sobre o eixo, ao qual é perpendicular. Os círculos assim descritos são chamados *paralelos*, e os planos passando pelo eixo e interceptando a superficie têm o nome de *meridianos*.

As superfícies de revolução distinguem-se geométricamente umas das outras pela natureza da geratriz: esta sendo uma semi-elipse, a figura gerada será o *elipsoide* de revolução; sendo uma semi-circunferência de círculo, teremos a *esfera* ou o *toro* de revolução, conforme for o eixo ou não um dos diâmetros da circunferência geratriz; se for a geratriz uma recta situada em plano diferente daquele que contenha o eixo, a superfície gerada será o *hiperboloide de uma folha de revolução*; se a geratriz, ainda rectilinea, e no mesmo plano do eixo, for paralela a este, a superficie gerada será a do *cilindro circular recto* ou *de revolução*; se a geratriz, continuando rectilinea, encontrar o eixo, a superfície será o *cone circular* ou o *tronco de cone*; se, finalmente, a geratriz for rectilinea e normal ao eixo, a superfície gerada será o *plano*.

Como acabamos de ver, as superfícies de revolução são de grande generalidade, pois contêm em si, como casos particulares, todas as outras anteriormente analisadas.

Síntese: o plano é caso particular das superfícies de revolução, quando o meridiano se reduz a uma recta perpendicular ao eixo. Então, a indeterminação se revela pelo facto de poder a geratriz ser perpendicular ao eixo, em qualquer

dos seus diferentes pontos. Pode, pois, o plano ser definido como a superfície gerada em torno de um eixo, por uma recta que lhe seja perpendicular.

Superficies polares:

O plano pode ainda ser considerado como a imagem geométrica dos pontos equidistantes de dois pontos fixos, chamados *polos*. Efectivamente: supondo, no caso anterior, que o meridiano se reduza a uma recta perpendicular ao meio do eixo, a superfície produzida pela rotação comportará sem duvida alguma a successiva aplicação de uma recta em todos os sentidos. E como essa é a propriedade caracteristica do plano, conclue-se ser esta a superficie assim gerada. Para chegar áquela afirmação, basta unir um ponto qualquer da geratriz aos dois polos, e ver que são sempre iguaes as distâncias respectivas, qualquer que seja o ponto considerado, pois iguaes são oblíquas que se desviam igualmente do traço da perpendicular. E quando um plano é perpendicular a uma recta, êle contem todas as perpendiculares á mesma recta, tiradas pelo respectivo traço: portanto o plano é perpendicular ao eixo, e este áquele.

Síntese: o plano é ainda caso particular das superfícies polares, como acabamos de ver minuciosamente.

Propriedades:

Como consequência dos diferentes modos de geração do plano, surgem várias e interessantes proposições, successivamente exploradas a seguir: —

1—O plano pode ser prolongado indefinidamente, em qualquer sentido.

2—*Tres pontos não em linha recta determinam a posição do plano.*

3—*Um ponto e uma recta determinam a posição do plano.*

4—*Duas rectas paralelas determinam a posição do plano.*

5—*Duas rectas convergentes determinam a posição do plano.*

6—*Uma recta só é insuficiente para determinar o plano.*

7—*Uma recta é perpendicular a um plano, quando perpendicular a todas as rectas tiradas por seu traço, no mesmo plano.*

A *reciproca* é tambem verdadeira.

8—*Recta e plano são paralelos, quando nunca se encontram, por mais que se prolonguem.*

9—*Dois planos paralelos nunca se encontram.*

10—*A intersecção de dois planos é uma recta.*

11—*A intersecção de tres planos é um ponto.*

12—*O plano pode ser práticamente representado por um paralelogramo.*

Planos perpendiculares e obliquos :

Um plano é *perpendicular* a outro, quando, caíndo sobre este, se não inclina nem para um nem para outro lado : fórma dois *ângulos diedros rectos.*

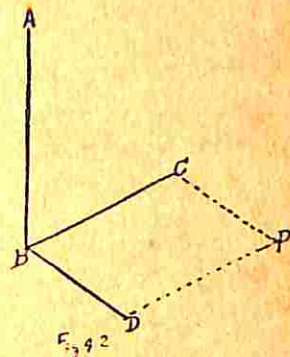
Um plano é *obliquo* a outro, quando, caindo sobre este, se inclina mais para um que para outro lado : fórma dois ângulos diedros desiguaes, um *agudo* e outro *obtuso.*

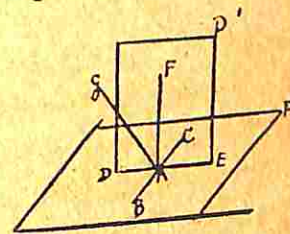
Angulo diedro, pois, é o formado pela intersecção de dois planos.

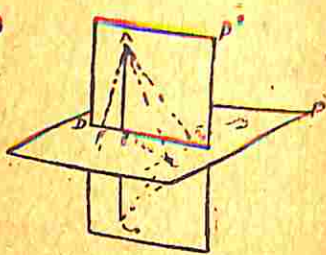
As perpendiculares a uma recta, em certo ponto dela, são todas situadas em plano perpendicular á mesma, no dito ponto. Esta proposição intuitiva, decorre naturalmente da concepção do plano como superfície de revolução : a geratriz é sempre perpendicular á directriz, no mesmo ponto dela.

Por um ponto de uma recta só se lhe pode tirar um plano perpendicular : é corolário da proposição anterior.

Teorema : *por um ponto fora de uma recta só se lhe pode tirar um plano perpendicular.*

Seja AB a recta e C o ponto. Tiremos CB perpendicular a AB e uma outra perpendicular BD á mesma recta dada : BC e BD determinarão o plano P, que passa por C, perpendicular a AB. E só êle convem : porque só existe uma perpendicular a AB, pelo ponto C.

Nota : o plano como superfície de revolução demonstraria mais facilmente o teorema.

Teorema : *por um ponto só se pode traçar uma perpendicular a um plano.* Dois casos a considerar, conforme o ponto no plano ou fora dele. Seja o ponto A no plano P. Tracemos por esse ponto a recta BC e façamos passar por A um plano P′, perpendicular a BC, interceptando P em DE. Em A, no plano P′, tracemos a perpendicular AF a DE. A recta BC, perpendicular a P′, é perpendicular a AF, que passa por seu traço no plano.

E como AF é tambem perpendicular a DE, será perpendicular ao plano P. Qualquer outra recta AG, tirada de A, será oblíqua ao plano P : porque AF e AG se interceptam em A e determinam um plano P′ que encontra P em DE ; e AF sendo perpendicular a P, será a DE : logo AG será oblíqua a DE e portanto ao plano P.

Seja agora o ponto A fora do plano P. Tracemos neste plano uma recta BC e façamos passar por A o plano P', perpendicular a essa recta, e interceptando P em DE. Tracemos em P outra recta FC. Liguemos A a F e prolonguemos AF até G, de modo que FG=FA. Por ser EC perpendicular a P', e CA e CG se acharem nesse plano, os ângulos CEA e CEG são rectos e os triângulos rectângulos CEA e CEG são iguaes: portanto CA=CG. Assim, FC é perpendicular a AG em F. Isto é: AF é perpendicular tirada por seu traço em P, portanto perpendicular a P, *c. s. q. d.*

Fg 44

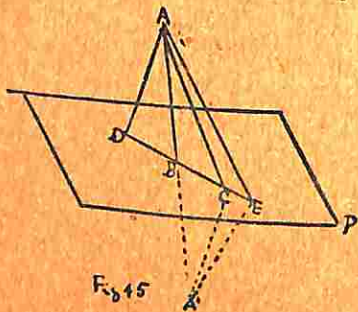
Nota: Em qualquer dos casos, a demonstração se torna bem mais fácil, considerando o plano como superfície de revolução: o ponto estará sempre no eixo, sendo o plano único, como se não ignora. E' o caminho prático a seguir.

A perpendicular de um ponto a um plano é o mais curto caminho desse ponto ao plano. Esta proposição decorre da anterior.

Teorema: *Obliquas a um plano e que se desviem igualmente do traço da perpendicular, são iguaes; desviando-se igualmente, a que mais se afastar será a maior.*

Seja o plano P, ao qual se tirou a perpendicular AB e as obliquas AC, AD e AE, as duas primeiras desviando-se igualmente de B.

Fig 45

Os triângulos rectângulos ABD e ABC são iguaes, por

terem os 2 catetos iguaes: logo, AD=AC, *c. s. q. d.*

Prolongando AB até A', de modo que BA'=AB e tirando as obliquas A'C e A'E, a poligonal A'EA>A'CA, que tem os mesmos extremos (2, pag. 5); logo, a metade daquela será maior que a metade desta, isto é, AE>AC, *c. s. q. d.*

Da proposição anterior decorrem estas outras:

1—*Obliquas iguaes desviam-se igualmente do traço da perpendicular a um plano; das obliquas desiguaes, a maior é a que mais se desvia.*

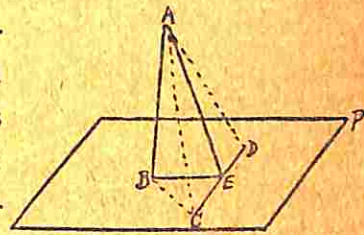
2—*A imagem geométrica de um ponto equidistante de todos os outros da circunferência de um círculo é a recta tirada pelo centro e perpendicular ao plano do círculo.*

3—*A imagem geométrica de um ponto equidistante das extremidades de uma recta é o plano perpendicular ao meio da recta.*

Teorema das 3 perpendiculares: *se do traço da perpendicular a um plano tirarmos uma perpendicular a uma recta qualquer desse plano, a linha que unir um ponto daquela 1ª perpendicular ao ponto de encontro das duas outras rectas será perpendicular á recta do dito plano.*

Seja a recta AB perpendicular ao plano P e CD uma recta qualquer traçada em P. Tracemos a perpendicular BE e a linha AE: queremos provar ser AE perpendicular a DC. Façamos ED=EC e tiremos AD e AC, BD e BC. As linhas BD e BC são iguaes, AD e AC tambem o são, como obliquas que se desviam por igual do traço da perpendicular: o triângulo CAD será isósceles, sendo AE mediana, portanto perpendicular á base CD, *c. s. q. d.*

Fig 46

A reciproca deste teorema é verdadeira: *se duas rectas partindo do mesmo ponto são perpendiculares, uma a um plano, e outra*

a uma recta do mesmo plano, a linha que juntar os traços dessas duas perpendiculares será perpendicular á recta do plano.

Rectos e planos paralelos:

Uma recta é paralela a um plano, quando nunca o encontra, por mais que uma e outro sejam prolongados.

Planos paralelos são os que não se encontram, por mais que se prolonguem.

Se dois planos são paralelos, toda a recta traçada em um deles será paralela ao outro.

Se duas rectas são paralelas, todo o plano tirado só por uma delas é paralelo á outra.

Por um ponto dado só se pode tirar uma paralela a uma recta dada: porque um ponto e uma recta determinam um plano.

Teorema: *Toda a paralela a uma recta de um plano, é paralela a este plano.*

Seja a recta AB paralela a CD, no plano P. Tiremos o plano P′ das duas paralelas. A recta AB prolongada, para encontrar o plano P, teria que encontrar sua paralela CD, o que é impossivel: logo, a recta e o plano são paralelos.

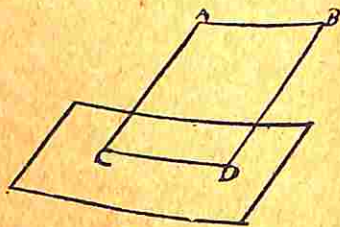



Fig. 47

Teorema: *Se uma recta e um plano são paralelos, todo o plano tirado pela recta e encontrando o 1° plano terá sua intersecção paralela á recta dada.*

Seja AB paralela ao plano P e P′ um plano tirado por AB e encontrando P em CD: queremos provar ser AB paralela a CD. Estas duas linhas estão no mesmo plano P′; e AB

só poderia encontrar CD, encontrando tambem o plano P, o que é impossivel: logo, as duas rectas serão paralelas.

Teorema: *toda a recta paralela a 2 planos que se encontram, é paralela á intersecção de ambos.*

Seja a recta CD paralela aos planos P e P′. Queremos provar que CD é paralela á intersecção AB. Por um ponto qualquer de AB tirando uma paralela a CD, essa paralela estará inteira no plano P e tambem no plano P′, o que só pode acontecer confundindo-se ela com AB. E' o que se queria demonstrar.

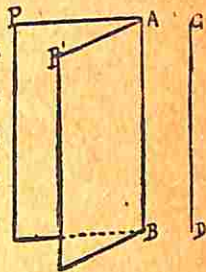



Fig. 48

Teorema: *dois planos paralelos interceptados por um terceiro, têm paralelas suas intersecções.*

Tomemos 2 planos paralelos P e P′, cujas intersecções com o plano P″ sejam AB e CD: queremos provar que essas duas rectas são paralelas. Efectivamente: AB e CD não se encontram, por estarem traçadas em planos paralelos; e como estão ambas no plano P″, sem se encontrar, são paralelas.

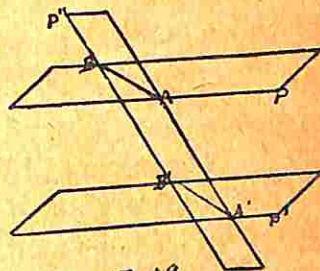



Fig. 49

Teorema: *rectas paralelas compreendidas entre planos paralelos são iguaes.*

Sejam AB e CD duas paralelas compreendidas entre os planos paralelos P e P′. Essas duas rectas determinam um outro plano P″ cujas intersecções (teorema anterior) são paralelas: então ABCD será um paralelogramo, isto é, AB=CD.

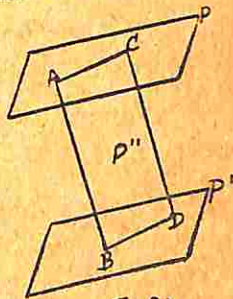



Fig. 50

Teorema: *se 2 planos são paralelos,*

toda a perpendicular a um deles se-lo-á tambem ao outro.

Sejam P e P' (figura anterior) 2 planos paralelos e AB uma perpendicular ao plano *P*. Provemos que AB é tambem perpendicular a BD, tirada por seu traço no plano *P'*. Pelas rectas AB e BD tiremos o plano *P''* : as intersecções AC e BD são paralelas; e AB, perpendicular a BD, tambem o é á sua paralela AC. O mesmo raciocínio se repetindo para qualquer outra posição da recta BD, segue-se que AB é perpendicular a *P'*.

Corolário : *perpendiculares compreendidas entre planos paralelos, são iguaes.*

Teorema : *dois planos paralelos a um terceiro, são paralelos entre si.*

Sejam P e P' dois planos paralelos a P''.

Fig 51

Tiremos AB perpendicular a P'': P e P'' sendo paralelos, a recta AB, perpendicular a P'', se-lo-á tambem a P. Provar-se-ia análogamente ser AB perpendicular P'. E se P e P' são perpendiculares á mesma recta, é porque são ambos paralelos.

Teorema: *duas rectas paralelas a uma terceira não situada no mesmo plano, são paralelas entre si.*

Sejam as rectas AB e CD paralelas a EF. Queremos provar serem elas 3 paralelas entre si. Tiremos o plano P das paralelas CD e EF e P' de AB e CD. P' será paralela a EF (pag. 68), encontrando P em CD: logo EF paralela a CD, *c. s. q. d.*

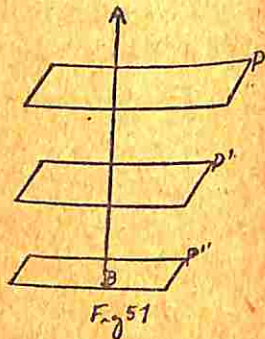
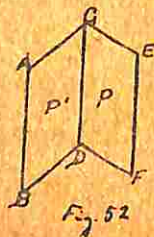



Fig. 52

Teorema: *ângulos de lados respectivamente paralelos, são iguaes ou suplementares, sendo paralelos os planos respectivos.*

Fig 53

Sejam BAC e EDF dois ângulos de lados respectivamente paralelos e da mesma extensão. As linhas AB e DE sendo paralelas e iguaes, ABDE será um paralelogramo, sendo AD paralela e igual a BE. Provar-se-ia análogamente ser AD igual e paralela a CF. E se BE e CF são iguaes e paralelas, BCEF é um paralelogramo, sendo então BC=EF. Os triângulos ABC e DEF são, pois, iguaes, por terem os 3 lados iguaes (3º caso de igualdade), e o ângulo A é igual ao ângulo D, como se queria demonstrar.

Se os dois ângulos fossem um agudo e outro obtuso, êles seriam suplementares (pág. 17). Vejamos agora a 2ª parte do teorema.

Seja o plano *P* determinado pelos lados do ângulo *A*. Pelo vértice *D* do segundo ângulo tiremos *P'* paralelo a *P* e portanto ás rectas AB e *AC*. A linha *DE* sendo paralela a AB estará inteira em *P'*, paralelo a *AB*. Assim tambem *DF*: sendo paralela a AC, estará inteira em *P'*, paralelo a *AC*. Logo o plano *P'*, tirado paralelamente a P, não é mais que o plano do ângulo em *D*, *c. s. q. d.*

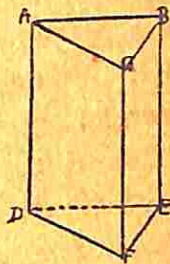
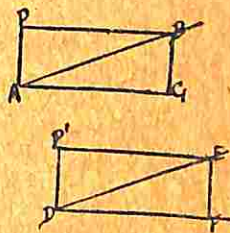



Fig 54

Teorema: *se duas rectas são paralelas, todo o plano perpendicular a uma delas se-lo-á tambem á outra.*

Sejam *AB* e *CD* duas rectas paralelas e *P* um plano perpendicular a *AB*: queremos provar ser *P* perpendicular tambem a *CD*. Pelos pontos *B* e *D* tiremos as duas paralelas *BE* e *DF*, ambas no plano *P*. Os ângulos em *B* e em *D* serão iguaes, por serem ambos agudos e de lados paralelos. E como o ângulo em *B* é recto, *D* se-lo-á tambem, o que só pode acontecer sendo *CD* perpendicular a *P*, *c. s. q. d.*

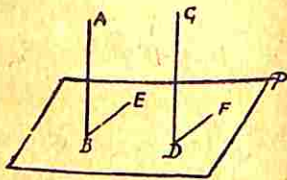



Fig 55

Teorema: *duas rectas perpendiculares ao mesmo plano são paralelas.* Sejam AB e CD, figura anterior, duas rectas perpendiculares ao plano *P*: queremos provar serem elas duas paralelas. Ligando B a D, e tirando pelo ponto D uma perpendicular ao plano *P*, essa recta confundir-se-á com CD, porque de um ponto só se pode traçar uma perpendicular a um plano: e se se confundem, *AB* e CD são paralelas, como perpendiculares á mesma recta BD.

Angulos poliedros:

Diedro é o ângulo formado por dois planos que se encontram.

No diedro ha a notar os dois planos que o formam, chamados *faces*; a linha de encontro delas duas, chamada *aresta* e o *ângulo plano correspondente*, a abertura do diedro, que lhe mede a grandeza angular.

O ângulo diedro é designado pela aresta ou então pelas faces e pela aresta, esta sempre colocada no meio.

As faces e a aresta do diedro são prolongadas indefinidamente, sua grandeza dependendo apenas do ângulo plano respectivo.

Angulo plano correspondente é o formado por duas perpendiculares á aresta, uma em cada face do diedro. Se no ponto C da aresta AB do diedro PABP' traçarmos a perpendicular CD, na face P, e a perpendicular CE, na face P', o ângulo DCE será o ângulo plano correspondente ao diedro dado.

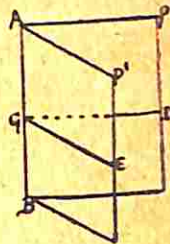



Fig 56

O diedro pode ser *recto, agudo* ou *obtuso*: recto, quando as faces perpendiculares uma á outra, ou então quando recto o ângulo plano correspondente; agudo, quando dessa natureza o respectivo ângulo plano; obtuso, quando maior que 90° o ângulo plano relativo. O diedro recto vale 90°; o agudo, menos de 90°; o obtuso, mais de 90° e menos de 180°.

Superficie poliedral é a que se compõe de diferentes planos.

Angulo sólido ou *ângulo poliedro* é a figura formada por tres ou mais planos que concorrem num ponto. Este ponto chama-se *vértice* do ângulo, os planos concorrentes recebendo o nome de *faces*, e o encontro das faces, o de *arestas*.

O mais simples ângulo poliedro é o *triedro*, que tem apenas tres faces. O triedro representa, pois, no caso reverso, o mesmo papel do triângulo entre os polígonos.

No ângulo poliedro ha a distinguir o *vértice*, as *faces* ou *ângulos das faces*, as *arestas* e ainda os *ângulos diedros*.

No triedro há 3 ângulos das faces, 3 arestas e 3 ângulos

diedros : estes são designados pelas arestas VA, VB e VC ou simplesmente por A, B e C, e as faces respectivamente opostas por a, b e c : a face a, oposta á aresta VA ; a face b, oposta á aresta VB ; e a face c, oposta á aresta VC.

Triedros suplementares são aqueles nos quaes as faces de um com os respectivos diedros de outro são suplementares.

Se os triedros VABC e V'A'B'C' forem suplementares, ter-se-á, por definição :

$$A'+a=180 \qquad A+a'=180$$
$$B'+b=180 \qquad B+b'=180$$
$$C'+c=180 \qquad C+c'=180$$

E, somando ordenadamente estes dois grupos de igualdades :

$$(A'+B'+C')+(a+b+c)=6 \text{ rectos} ;$$
$$(A+B+C)+(a'+b'+c')=6 \text{ rectos} ;$$

Isto é : *a soma das faces de um com a soma dos diedros respectivamente opostos de outro será igual a 6 rectos.*

O ângulo poliedro póde sempre ser decomposto em triedros : tantos, quantas as faces menos duas. E' caso analogo o já observado com o polígono (pag. 29). Um ângulo políedro de seis faces, portanto, poderá ser decomposto em 4 triedros, por meio de planos passando pelo vértice V, pelas diagonaes da base, por uma aresta VA e por todas as outras não consecutivas VC, VD e VE.

Proposição axiomática : *de duas superficies poliedraes convexas com os mesmos extremos, uma envolvente e outra envolvida, a envolvente é sempre maior que a envolvida.*

Teorema : *a face de um triedro é menor que a soma das outras duas :*

$$a < b + c$$

Porque a superfície poliedral envolvente é maior que a envolvida com os mesmos extremos.

Passando b para o 1º membro, na desigualdade precedente, vem :

$$a - b < c$$

Isto é : *cada face é maior que a diferença das outras duas.*

Corolário : *num ângulo poliedro qualquer, cada face é sempre menor que a soma das outras.*

Lei das faces : *em todo o ângulo poliedro a soma dos ângulos das faces é sempre menor que 4 rectos.*

Seja um ângulo poliedro qualquer, descansando sobre um plano, e cujas cinco faces se vão alargando cada vez mais, o vértice V se aproximando assim do plano sobre que repousa o dito ângulo : quando as faces, já bem alargadas, coincidirem com o referido plano, a soma dos ângulos das faces passará a ser 4 rectos, como soma de todos os ângulos em torno de um ponto do mesmo plano. Mas a coincidencia das faces com o plano não se poderá fazer nunca, porque nesse caso deixaria de existir poliedro, para se ficar apenas com um plano. E como só nesse caso é que a soma dos ângulos das faces podia valer 4 rectos, conclue-se ser essa soma sempre menor, *c. s. q. d.* Isto é :

$$a+b+c+d+e+\ldots<4 \text{ rectos}.$$

ou,

$$a+b+c+d+e=4 \text{ rectos}-\infty$$

Representando ∞ quantidade ângular maior que zero e menor que 4 rectos.

Lei dos ângulos : *em todo o triedro a soma dos ângulos diedros é maior que 2 e menor que 6 rectos.*

Seja o triedro VABC e o suplementar respectivo V'A'B'C'.

Ter-se-á por definição de triedros suplementares :

$$A + a' = 2r$$
$$B + b' = 2r$$
$$C + c' = 2r$$

E, somando ordenadamente :

$$(A+B+C)+(a'+b'+c')=6\,r \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Porém, pela lei das faces,

$$a'+b'+c'=4\,r-\infty$$

Levando este valor na igualdade (1), vem :

$$A+B+C+4\,r-\infty=6\,r\,;\; A+B+C=6\,r-4\,r+\infty$$
$$A+B+C=2\,r+\infty \qquad (2)$$

A igualdade (1) mostra que $A+B+C$ só poderia ser igual a 6 rectos, quando $a'+b'+c'$ fosse igual a zero. E como tal soma não pode desaparecer, segue-se que $A+B+C$ será sempre menor que 6 rectos. E a igualdade (2) mostra claramente ser a somma $A+B+C$ sempre maior que 2 rectos, *c. s. q. d.*

Igualdade dos triedros :

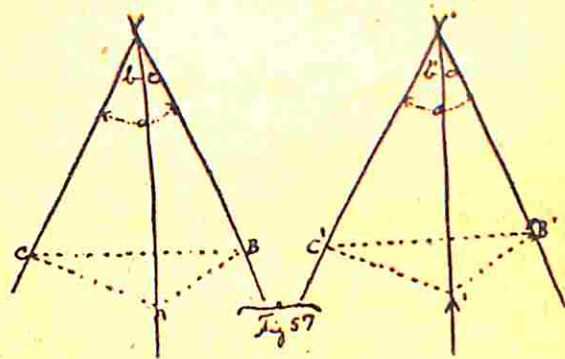
Triedros iguaes são os que têm faces e ângulos respectivamente iguaes :

Ha 3 casos de igualdade dos triedros, correspondentes aos 3 casos já conhecidos de igualdade dos triângulos, conforme se der *uma, duas* ou *tres* faces.

1° caso : *2 triedros são iguaes, quando têm uma face igual adjacente a diedros respectivamente iguaes.*

Sejam os triedros VABC e V'A'B'C' nos quaes se tenham

$a=a'$, $B=B'$ e $C=C'$.

Apliquemos a face a sobre a sua igual a', de modo que as duas se ajustem perfeitamente: como $B=B'$, e $C=C'$, as faces c e b se ajustarão respectivamente com c' e b'. E os 2 triedros se ajustando, serão iguaes.

2° caso : *2 triedros são iguaes, quando têm 2 faces iguaes e igual o diedro por elas formado.*

Sejam os 2 triedros da figura anterior, nos quaes se tenham $b=b'$, $c=c'$ e $A=A'$. Apliquemos o triedro em V sobre o triedro em V', de modo que A se ajuste perfeitamente com A': como as faces b e c são respectivamente iguaes a b' e c', eles tambem se ajustarão. E os 2 triedros se ajustando, serão iguaes.

3° caso : *2 triedros são iguaes, quando têm as 3 faces respectivamente iguaes e semelhantemente colocadas.*

Sejam os 2 triedros da figura anterior, nos quaes $a=a'$, $b=b'$ e $c=c'$. Tracemos os angulos planos respectivos, BAC e B'A'C' dos diedros A e A', um de cada um deles, de modo que VA seja igual a V'A'. Os triângulos rectângulos VAB e V'A'B' serão iguaes, por terem um cateto igual, $VA=V'A'$, e tambem um ângulo agudo igual, $c=c'$. Logo $AB=A'B'$ e $VB=V'B'$. Provar-se-ia análogamente ser $VAC=V'A'C'$ e $VBC=V'B'C'$, o que daria como resultado o triângulo $ABC=A'B'C'$, por terem os 3 lados respectivamente iguaes : logo o ângulo $BAC=B'A'C'$, portanto o diedro $VA=V'A'$, ou

os 2 triedros iguaes, por terem um diedro igual formado por faces iguaes.

Um caso interessante: *2 triedros são iguaes, quando têm os diedros respectivamente iguaes e semelhantemente dispostos.*

A igualdade dos ângulos dos 2 triedros arrasta a igualdade das faces dos triedros suplementares: e como as faces destes podem coincidir (3º caso de igualdade), seus ângulos diedros serão respectivamente iguaes, o que arrasta a igualdade das faces dos 2 triedros primitivamente considerados, portanto, a igualdade dos mesmos.

Igualdade dos ângulos poliedros: *dois ângulos poliedros são iguaes, quando se podem decompôr no mesmo número de triedros iguaes e semelhantemente dispostos.* Seria facil demonstrar a proposição, intuitiva bastante, mesmo para os que começam. A decomposição far-se-á como anteriormente estabelecida: fazendo passar planos por uma aresta comum e pelas outras não consecutivas.

Poliedros:

Poliedro é o sólido terminado por faces planas.

O poliedro distingue-se limpamente do ângulo poliedro: aquele é sólido limitado; este, simples ângulo, com faces planas indefinidamente prolongadas.

No poliedro ha a notar os seguintes elementos: *faces, arestas, ângulos, vértices, diagonaes, superficie* e *volume*. Faces são os diferentes planos que limitam o sólido; arestas são as intersecções das faces; ângulos do poliedro são os ângulos sólidos formados por 3 ou mais faces concorrendo num ponto; vértices do poliedro são os vértices dos ângulos sólidos respectivos; diagonal é a linha que une dois vértices não situados na mesma face; superficie é a área exterior do poliedro; volume é a porção de espaço ocupado pelo poliedro.

O mais simples de todos os poliedros é o *tetraedro*, com 4 faces triângulares.

Poliedro convexo é aquele cujos ângulos sólidos são todos salientes: uma das suas faces sendo prolongada, o poliedro ficará inteiro de um só lado dela.

A geometria só se ocupa com os poliedros convexos.

Poliedro regular é aquele cujas faces são polígonos regulares e iguaes, sendo tambem iguaes todos os ângulos sólidos.

Ha apenas 5 poliedros regulares: o *tetraedro*, com 4 faces triângulares; o *hexaedro* ou *cubo*, que tem 6 faces quadradas; o *octaedro*, com 8 faces triângulares; o *dodecaedro*, que têm 12 faces pontagonaes e o *icosaedro*, com 20 faces triangulares. A lei das faces autoriza semelhante afirmação. Efectivamente: devendo ser a soma dos ângulos das faces sempre menor que 4 rectos (lei das faces, pag. 75), segue-se que para formar poliedros regulares só poderemos grupar num ponto polígonos regulares nos quaes a soma dos ângulos seja inferior áquele numero. O ângulo interno do triângulo equilátero vale 60º. Grupando 3 deles num ponto, a soma dos ângulos será 3×60 ou 180º, e ter-se-á o *tetraedro*, o 1º poliedro regular. Grupando 4 triângulos equiláteros num ponto, a soma dos ângulos será 4×60 ou 240º, e ter-se-á o *octoedro*, com 8 faces triângulares, 4 em cima e 4 em baixo. Grupando 5 triângulos equiláteros num ponto, a soma dos ângulos será 5×60 ou 300º, e ter-se-á o *icosaedro*, com 20 faces triângulares. Grupando 6 triângulos equiláteros, a soma dos ângulos das faces passaria a ser 6×60 ou 360º,

isto é, 4 rectos exactos : a lei das faces seria então violada, sinal de que não é possivel a reunião desejada. Os triângulos equiláteros, pois, dão 3 políedros regulares : o *tetraedro*, o *octaedro* e o *icosaedro*. Vejamos os quadrados. O ângulo interno do quadrado vale 90º. Grupando 3 deles num ponto, a soma dos ângulos das faces será 3×90 ou 270°. E ter-se-á o *hexaedro* ou *cubo*, com 6 faces quadradas. Grupando 4 quadrados num ponto, a soma dos ângulos das faces passaria a ser 4×90 ou 360º, isto é, a lei das faces seria violada. Logo, com o quadrado só se pode construir um poliedro regular, o *cubo*. Examinemos o pontágono. O ângulo interno do pontágono regular vale 108º. Grupando 3 deles num ponto, a soma dos ângulos das faces será 3×108 ou 324º. E ter-se-á o *dodecaedro*, com 12 faces pentagonaes, o único formado de pentágonos : porque para reunir 4 deles em um ponto a lei das faces seria violada, pois ter-se-ia de soma 432º. Vejamos o hexágono regular, cujo ângulo interno vale 120º. Com a reunião de 3 deles num ponto, a soma das faces seria 360º, valor superior ao imposto pela lei das faces : com hexágonos, pois, impossivel a existência de poliedros regulares ; e, com mais forte razão, com polígonos de número de lados superior a 6. Portanto, só existem 5 políedros regulares, os 5 anteriormente referidos : *tetraedro*, *cubo* ou *hexaedro*, *octaedro*, *dodecaedro* e *icosaedro*.

E' o que se conclue da lei das faces.

Os principaes políedros são os *prismas* e as *pirâmides*.

Prisma é o sólido compreendido entre 2 polígonos iguaes e paralelos e cujas faces lateraes são paralelogramos. Os 2 polígonos iguaes e paralelos constituem as *bases* do prisma. As faces lateraes são tantas quantos os lados de um dos polígonos bases.

O prisma é *recto* ou *obliquo*, conforme as arestas rectas ou oblíquas ás duas bases.

As arestas lateraes do prisma são iguaes, como paralelas compreendidas entre planos paralelos.

No *prisma recto* as faces lateraes são rectângulos.

O prisma toma o nome da base : *triangular*, quando a base é triângulo; *quadrangular*, quando é quadrilátero; *hexagonal*, quando hexágono.

Prisma regular é o prisma recto cujas bases são polígonos regulares iguaes.

Altura do prisma é a distância das duas bases: no prisma recto a altura é igual a uma das arestas.

Tronco de prisma é a porção de prisma compreendida entre a base e uma secção não paralela á mesma.

Paralelipipedo é o prisma que tem por bases paralelogramos.

Paralelipípedo rectângulo é o prisma recto que tem por bases rectângulos.

O *cubo* é o paralelipípedo rectângulo cujas faces são quadrados iguaes aos das duas bases : recebe o nome de *hexaedro regular*. E' um dos cinco poliedros regulares anteriormente estabelecidos.

Secção recta do prisma é toda a secção feita perpendicularmente ás arestas lateraes do mesmo.

Superficie lateral do prisma é a soma das áreas dos paralelogramos lateraes ; *superficie total* é a soma da superfície lateral e das duas bases do prisma.

Pirâmide é o poliedro que tem por base um polígono e por faces lateraes triângulos, com vértice comum.

Vértice da pirâmide é o ponto de convergência de todas as faces lateraes.

Altura da pirâmide é a perpendicular do vértice á base.

A pirâmide toma o nome de base : *triangular*, quando a base é triângulo ; *quadrangular*, quando a base quadrilátero ; *hexagonal*, quando hexágono.

A piramide triangular recebe o nome especial de *tetraedro* : qualquer das faces pode ser tomada por base.

Pirâmide regular é a que tem por base polígono regular. Sua altura cáe no centro do polígono base.

Na pirâmide regular todas as arestas lateraes são iguaes, e as faces lateraes são triângulos isósceles iguaes. A altura dos triângulos faces é chamada *apotêma* da pirâmide.

Tronco do pirâmide é a secção feita por plano que lhe corte todas as arestas: se a secção for paralela á base, ter-se-á o *tronco de pirâmide de bases paralelas*.

Tronco de pirâmide regular é a porção da pirâmide regular compreendida entre a base e uma secção paralela. As faces lateraes serão trapézios isósceles iguaes, sendo *apotema* a altura de cada um deles.

Tetraedros equivalentes são os que têm a mesma base e a mesma altura.

Pirâmides ou prismas equivalentes são os que têm a mesma base e a mesma altura.

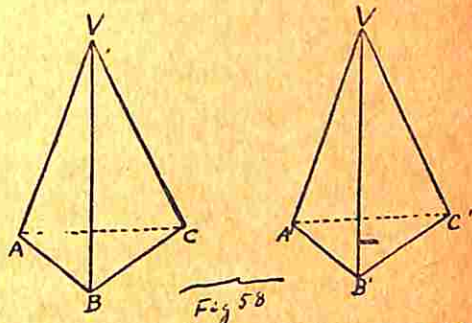
Igualdade dos tetraedros :

Tetraedros iguaes são os que têm faces e ângulos respectivamente iguaes. Ha 3 casos de igualdade de tetraedros, correspondentes aos 3 casos já conhecidos de igualdade de triângulos e triedros : 1º caso, *uma face* ; 2º caso, *duas faces*; 3º caso, *tres faces*.

1º caso : *dois tetraedros são iguaes, quando têm uma face*

igual, adjacente a tres diedros respectivamente iguaes e semelhantemente dispostos.

Sejam os tetraedros VABC e V'A'B'C' nos quaes se tenha VAC=V'A'C' e VA = V'A', VC = V'C' e AC=A'C'.

Transportemos o 1º tetraedro sobre o 2º, de modo que a face VAC se ajuste perfeitamente com a sua igual V'A'C'. Como VA=V'A', a face VAB se ajustará com V'A'B' ; e como VC=V'C' a face VCB se ajustará com V'C'B', o mesmo succedendo com ABC e A'B'C'. Os dois tetraedros se ajustam perfeitamente ; logo, são iguaes.

2º caso : *dois tetraedros são iguaes, quando têm duas faces iguaes e semelhantemente dispostas, e igual o diedro por elas formado.*

Sejam os tetraedros VABC e V'A'B'C', figura anterior, nos quaes AVB=A'V'B', BVC=B'V'C' e VB=V'B'.

Transportemos o 1º tetraedro sobre o 2º, de modo que o diedro VB se ajuste perfeitamente com V'B'. E como as faces correspondentes são iguaes, VA cairá sobre V'A', VC sobre V'C', a face ACB se ajustando assim com A'C'B'. Os 2 tetraedros então ajustam-se perfeitamente, sendo portanto iguaes.

3º caso : *dois tetraedros são iguaes, quando têm tres faces respectivamente iguaes e semelhantemente dispostas.*

Sejam os tetraedros VABC e V'A'B'C', figura anterior, nos quaes VAB=V'A'B'. AVC=A'V'C' e BVC=B'V'C'.

Se as 3 faces que concorrem em *V* e V' são iguaes, os triedros correspondentes se-lo-ão tambem (3º caso de igualdade, pág. 77) e os 2 tetraedros dados se ajustarão perfeitamente, sendo então iguaes.

Pirâmides iguaes são as que têm bases, faces e ângulos respectivamente iguaes.

Igualdade das pirâmides :

Duas pirâmides são iguaes, quando se podem decompôr no mesmo número de tetraedros iguaes e semelhantemente dispostos. A decomposição faz-se dividindo a base em triângulos, por meio de diagonaes partindo de um só vértice, e fazendo passar planos pelo vértice e por cada uma das ditas diagonaes. E a igualdade é manifesta : porque *somas de quantidades iguaes só podem ser iguaes.* E cada pirâmide é soma dos tetraedros respectivos.

A igualdade dos prismas fica dependendo da dos *prismas triângulares* : porque todo o prisma pode ser decomposto em tantos prismas triângulares, quantos os lados do polígono base menos dois. Basta para isso traçar as diagonaes das duas bases, partindo dos vértices sobre a mesma aresta lateral para as outras não consecutivas, fazendo traçar planos pelas diagonaes paralelas em cada base : o prisma hexagonal, por exemplo, ficará assim dividido em 4 prismas triangulares, todos com a mesma altura.

Igualdade dos prismas triangulares—Fica dependendo da dos tetraedros : porque *todo o prisma triangular pode ser decomposto em 3 tetraedros equivalentes entre si.*

Seja o prisma triangular ABCA'B'C'. Tracemos por B, A' e C' o plano BA'C' e por B, A, C' o plano BAC'. O prisma dado ficará assim decomposto em 3 tetraedros : BA'B'C', C'ABC e BAA'C'. Os dois primeiros, BA'B'C e C'ABC, são equivalentes, por terem bases iguaes, ABC=A'B'C', e tambem a mesma altura—a do prisma dado. Mas o vértice do tetraedro C'ABC pode ser o ponto B, o que dá então BACC' E este é equivalente ao 3º acima indicado, isto é, a BAA'C, por terem a mesma base AC'A'=AC'C, metade do paralelogramo AA'CC', e a altura comum, de B a esse plano AA'CC'. Isto é : os tres tetraedros referidos são equivalentes. Logo,

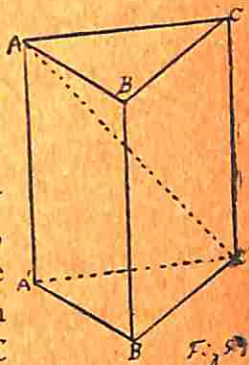
Igualdade dos prismas triangulares : *dois prismas triangulares são iguaes, quando podem ser decompostos em tres tetraedros iguaes e semelhantemente dispostos.*

Corolário : *todo o tetraedro é o terço do prisma da mesma base e da mesma altura.*

Proposição final : *dois prismas são iguaes, quando se podem decompôr no mesmo número de prismas triangulares iguaes e semelhantemente dispostos.* A demonstração é facil : porque somas, do mesmo número de quantidades iguaes têm que ser por força iguaes. E cada prisma é soma do mesmo número de quantidades iguaes—os tetraedros respectivos.

Vejamos agora alguns teoremas interessantes, relativos á igualdade dos prismas e pirâmides.

Questões sobre igualdade de prismas e pirâmides:

Teorema : *as faces opostas de um paralelipípedo são iguaes e paralelas.*

Seja o paralelipípedo ABCDA'B'C'D' sendo a face AC' oposta a BD'. As faces desse prisma sendo por definição paralelogramos, as rectas CC' e DD' são iguaes e paralelas, o mesmo succedendo a AA' e BB'. Assim, os ângulos CC'A' e DD'B' são iguaes, sendo paralelos os respectivos planos; e os paralelogramos AC' e BD', tendo um ângulo igual formado por lados iguaes, poderiam coincidir, sendo então iguaes, *c. s. q. d.*

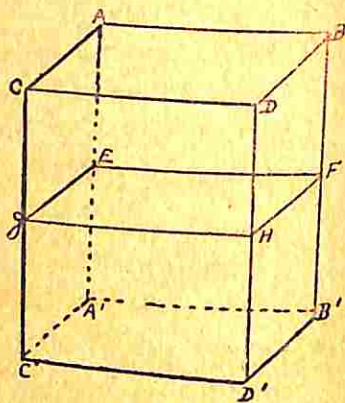



Fig. 60

Corolário: *em todo o paralelipípedo podem-se tomar para bases duas faces opostas quaesquer.*

Teorema: *em todo o paralelipípedo a secção plana encontrando 4 arestas paralelas, é um paralelogramo.*

Seja EFGH uma secção feita no paralelipípedo da figura anterior. As rectas GE e HF são paralelas, como intersecções do plano secante com os planos paralelos AC' e BD'; o mesmo acontece com as rectas EF e GH: logo, a figura EFGH é paralelogramo, *c. s. q. d.*

Teorema: *as diagonaes de um paralelipípedo dividem-se ao meio.*

Seja o paralelipipedo AG. Por duas arestas opostas tracemos o plano BFHD. A figura formada pela intersecção do plano será um paralelogramo, cujas diagonaes BH e DF, diagonaes tambem do paralelipípedo, se cortam ao meio (pag. 28). O

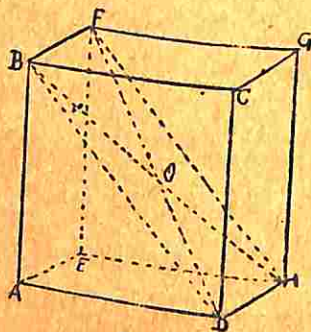



Fig. 61

mesmo acontecendo com quaesquer outras diagonaes, conclue-se a veracidade da afirmação.

Teorema: *as secções feitas num prisma por planos paralelos são polígonos iguaes.*

Seja o prisma pentagonal, AB, tendo duas secções C e D paralelas. As rectas IH e I'H' são paralelas, como intersecção de 2 planos paralelos C e D, interceptados por um 3º, HI': logo o quadrilátero HIH'I' é paralelogramo e HI=H'I'. Do mesmo modo provar-se-ia ser HG igual e paralelo a H'G', GF a G'F', FE a F'E' e EI a E'I'. Isto é: os 2 polígonos têm os seus lados respectivamente iguaes; e seus ângulos sendo tambem iguaes 2 a 2, por terem os lados paralelos, segue-se que os 2 polígonos são iguaes.

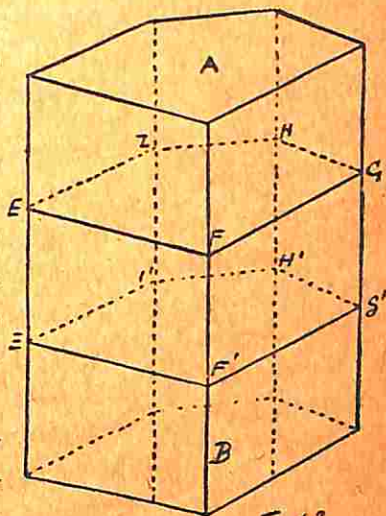



Fig. 62

1º corolário: *as secções rectas de um prisma são paralelas e iguaes.*

2º corolario: *toda a secção paralela á base de um prisma é igual a essa base.*

Teorema: *dois prismas rectos de bases iguaes e da mesma altura são iguaes.*

Sejam dois prismas P e P', tendo a mesma base B e a mesma altura h. Adaptando P a P', as bases coincidirão, por serem iguaes; as arestas tambem coincidirão, como perpendiculares iguaes traçadas no mesmo ponto do plano: e os 2 prismas se ajustando completamente, serão iguaes.

1° corolário : *o prisma triângular recto é metade do paralelipipedo recto de base dupla e da mesma altura* : porque tirando nas bases deste sólido duas diagonaes paralelas e fazendo passar por elas um plano, ter-se-ão 2 prismas triangulares da mesma base e da mesma altura, portanto iguaes.

2° corolário : *o plano tirado por duas arestas opostas de um paralelipipedo rectângulo, divide-o em 2 prismas triangulares iguaes.*

3° corolário : *um prisma recto de base qualquer pode sempre ser decomposto em prismas triangulares rectos da mesma altura.*

Teorema : *o prisma oblíquo é equivalente a um prisma recto, tendo por bases a respectiva secção recta e por altura a aresta lateral.*

Seja o prisma oblíquo ABCDA'B'C'D' e L'M'N'P' a respectiva secção recta.

Fazendo AL=A'L' e traçando os planos LMNP e L'M'N'P' perpendiculares ás arestas, obter-se-á um prisma recto cuja altura LL' é igual á aresta AA' do prisma dado.

E para provar que esses dois prismas são equivalentes, basta provar que os troncos rectos LMNP. ABCD e L'M'N'P' e A'B'C'D' são iguaes entre si: porque da figura total subtraindo éste tronco, tem-se o prisma recto, e subtraindo aquele, tem-se o prisma oblíquo.

Com efeito: as arestas do prisma recto são iguaes entre si e tambem iguaes ás do prisma oblíquo, porque MM'=LL', como paralelas entre planos paralelos, e LL'=AA'=BB'. Subtraindo de cada membro dessas igualdades a parte comum BM', vem: MB=M'B': e, conseguintemente, NC=N'C', PD=P'D'.

As secções rectas são iguaes, como secções paralelas que são do mesmo plano (pag. anterior). Fazendo a coincidencia dos 2 troncos, de modo que os polígonos iguaes LMNP e L'M'N'P' se ajustem, LA coincidirá com L'A', caindo A em A', B em B', C em C' e D em D': logo os 2 troncos, que se ajustam perfeitamente, são iguaes, *c. s. q. d.*

Exercicios interessantes :

1—Provar que são paralelos uma recta e um plano perpendiculares á mesma recta.

2—Provar que se dois planos são respectivamente paralelos a dois outros que se encontram, as intersecções serão paralelas.

3—Provar que em todo o triedro a maior face se opõe maior ângulo e vice-versa.

4—Provar que num triedro qualquer os tres *planos bissectores* se encontram segundo uma recta, cujos pontos são equidistantes das faces.

5—Provar que em todo o triedro os planos perpendiculares ás faces traçados pelas arestas opostas, se encontram numa mesma recta.

1° corolário : *o prisma triângular recto é metade do paralelipipedo recto de base dupla e da mesma altura* : porque tirando nas bases deste sólido duas diagonaes paralelas e fazendo passar por elas um plano, ter-se-ão 2 prismas triangulares da mesma base e da mesma altura, portanto iguaes.

2° corolário : *o plano tirado por duas arestas opostas de um paralelipipedo rectângulo, divide-o em 2 prismas triangulares iguaes.*

3° corolário : *um prisma recto de base qualquer pode sempre ser decomposto em prismas triangulares rectos da mesma altura.*

Teorema : *o prisma oblíquo é equivalente a um prisma recto, tendo por bases a respectiva secção recta e por altura a aresta lateral.*

Seja o prisma oblíquo ABCDA'B'C'D' e L'M'N'P' a respectiva secção recta.

Fazendo AL=A'L' e traçando os planos LMNP e L'M'N'P' perpendiculares ás arestas, obter-se-á um prisma recto cuja altura LL' é igual á aresta AA' do prisma dado. E para provar que esses dois prismas são equivalentes, basta provar que os troncos rectos LMNP. ABCD e L'M'N'P' e A'B'C'D' são iguaes entre si: porque da figura total subtraindo êste tronco, tem-se o prisma recto, e subtraindo aquele, tem-se o prisma oblíquo.

Fig 63

Com efeito: as arestas do prisma recto são iguaes entre si e tambem iguaes ás do prisma oblíquo, porque MM'=LL', como paralelas entre planos paralelos, e LL'=AA'=BB'. Subtraindo de cada membro dessas igualdades a parte comum BM', vem: MB=M'B' : e, conseguintemente, NC=N'C', PD=P'D'.

As secções rectas são iguaes, como secções paralelas que são do mesmo plano (pag. anterior). Fazendo a coincidencia dos 2 troncos, de modo que os polígonos iguaes LMNP e L'M'N'P' se ajustem, LA coincidirá com L'A', caindo A em A', B em B', C em C' e D em D' : logo os 2 troncos, que se ajustam perfeitamente, são iguaes, *c. s. q. d.*

Exercicios interessantes :

1—Provar que são paralelos uma recta e um plano perpendiculares á mesma recta.

2—Provar que se dois planos são respectivamente paralelos a dois outros que se encontram, as intersecções serão paralelas.

3—Provar que em todo o triedro a maior face se opõe maior ângulo e vice-versa.

4—Provar que num triedro qualquer os tres *planos bissectores* se encontram segundo uma recta, cujos pontos são equidistantes das faces.

5—Provar que em todo o triedro os planos perpendiculares ás faces traçados pelas arestas opostas, se encontram numa mesma recta.

Teoria da semelhança

I

CASO PLANO

Noções fundamentaes:

Relação de duas linhas é a relação existente entre os números que lhes marcam a extensão: se a linha AB tem 3 metros de comprimento e a linha CD, 5 metros, a relação das duas será $\frac{AB}{CD} = \frac{3}{5}$.

Duas linhas são proporcionaes a duas outras, quando a relação das duas primeiras é igual á relação das duas últimas: se a relação entre as línhas AB e CD for $\frac{3}{5}$, e se o mesmo acontecer com a das linhas EF e GH, essas 4 linhas serão proporcionaes, isto é, formarão uma proporção:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{3}{5}; \frac{EF}{GH} = \frac{3}{5} \therefore \frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$$

Uma linha é *média proporcional a duas outras*, quando pode figurar como meios ou como extremos de uma proporção cujos extremos ou cujos meios sejam essas duas outras. Isto é: se a relação entre as linhas AB e CD for a mesma que a existente entre CD e DE, ou se se tiver $\frac{AB}{CD} = \frac{CD}{DE}$, CD será média proporcional a AB e DE.

Essa proporção dá $\overline{CD}^2 = AB \times DE$ ou $CD = \sqrt{AB \times DE}$.

Os termos AB e DE são chamados cada um dêles *terça proporcional*.

4ª proporcional é um termo qualquer de uma proporção relativamente aos outros tres.

Proposição fundamental: *sobre uma recta só ha um ponto cuja relação das distâncias aos seus extremos seja igual a uma fracção dada.*

Seja AB a recta, $\frac{4}{3}$ a relação dada, e C um ponto tal que dê $\frac{AC}{BC} = \frac{4}{3}$.

Se um outro ponto C' pudesse dar a mesma relação, isto é, se se pudesse ter $\frac{AC'}{BC'} = \frac{4}{3}$, poder-se-ia escrever $\frac{AC}{BC} = \frac{AC'}{BC'}$. E como em toda a proporção a soma dos 2 primeiros termos está para o 2º, como a soma dos 2 últimos para o 4º, ter-se-ia:

$$\frac{AC+BC}{BC} = \frac{AC'+BC'}{BC'} \text{ ou } \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{BC'}$$

Fracções iguaes, que têm o mesmo numerador, o denominador tem que ser o mesmo nelas duas: logo, BC'=BC. Isto é: o ponto C' se confunde com o ponto C, ou só há um ponto nas condições desejadas.

Sobre o prolongamento de uma recta AC só há um ponto B cuja relação das distâncias aos extremos dela seja igual a uma relação dada.

Seja, na figura anterior, $\frac{AB}{BC}=\frac{4}{3}$. Se se tivesse tambem $\frac{AB'}{B'C}=\frac{4}{3}$, ter-se-ia a proporção $\frac{AB}{BC}=\frac{AB'}{B'C}$, da qual se tiraria (Arith. Vol. II, pág. 75).

$$\frac{AB-BC}{BC}=\frac{AB'-B'C}{B'C} \quad \text{ou} \quad \frac{AC}{BC}=\frac{AC}{B'C}$$

Fracções iguaes, com o mesmo numerador, devem ter o mesmo denominador. Isto é: BC=B'C, ou o ponto B' confunde-se com o ponto B.

Teorema: *se diversas paralelas, interceptados por uma transversal, dividem esta em partes iguaes, dividirão do mesmo modo qualquer outra transversal.*

Sejam as paralelas AB, CD, EF e GH, as quaes interceptam a seccante AG em 4 partes iguaes; e suponhamos BH uma outra secante qualquer: queremos provar que esta última ficou tambem dividida em 4 partes iguaes. Tracemos por A, C, e E rectas paralelas á transversal BH. Taes rectas são respectivamente iguaes aos segmentos BD, DF e FH, como lados opostos de paralelogramos (pág. 27): bastará então provar que AK=CL=EM. Os triângulos ACK, CEL e EGM são iguaes, por terem um lado igual adjacente a ângulos respectivamente iguaes (1º caso, pág. 21): logo AK=CL=EM e, portanto, BD=DF=FH. *c. s. q. d.*

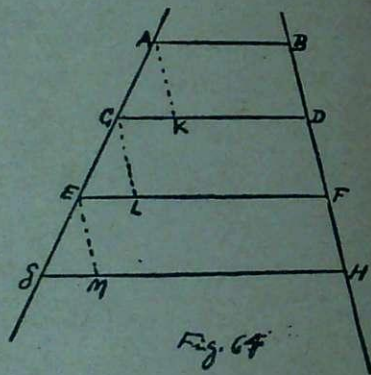



Fig. 64

Corolário: *para dividir uma recta* AB *em partes iguaes,* basta traçar de A uma linha indefinida AX, tomar sobre esta o número de partes iguaes desejado, unir o extremo da última divisão a B e traçar pelos outros pontos de divisão rectas paralelas a esta última.

Teorema: *toda a paralela a um dos lados de um triângulo divide os outros dois lados em partes proporcionaes.*

Seja o triângulo ABC e DE paralela a BC: queremos provar que $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$. Suponhamos que se tenha achado para os segmentos AD e DB uma medida comum, a pequena recta *m*, contida 4 vezes em AD e 3 vezes em BD. Ter-se-á então $\frac{AD}{DB}=\frac{4}{3}$. Se pelos pontos de divisão traçarmos paralelas a BC, a recta AC (pág. anterior) será dividida em 7 partes iguaes, 4 em AE e 3 em EC, obtendo-se a relação $\frac{AE}{CE}=\frac{4}{3}$. Comparando esta com a igualdade anterior, vem finalmente, *c. s. q. d.*: $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{CE}$

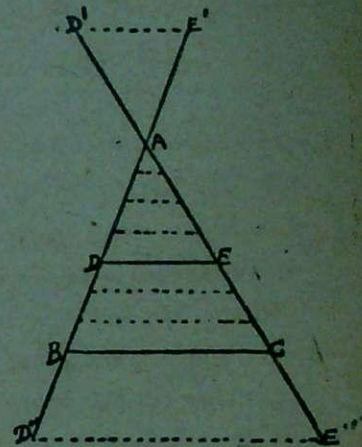



Fig. 65

1º corolário: *cada segmento do lado pode ser substituido por êle inteiro*: basta aplicar convenientemente as propriedades das proporções (Arith., Vol. II, pág. 75):

$$\frac{AD+DB}{BD}=\frac{AE+CE}{CE} \quad \text{ou} \quad \frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CE}$$

$$\frac{AD+DB}{AD}=\frac{AE+EC}{AE} \quad \text{ou} \quad \frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}.$$

2º corolário: *os lados estão entre si como os segmentos correspondentes.* Alternando a proporção anterior, vem:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CE}$$

E' facil ainda ligar $\frac{AD}{AE}$ ás duas relações anteriores.

3° corolário : a paralela DE pode ser traçada acima do vértice A ou abaixo da base BC, sem a menor alteração nas consequências já estabelecidas.

4° corolário : *duas convergentes interceptadas por qualquer número de paralelas, ficam por estas divididas em partes respectivamente proporcionaes.*

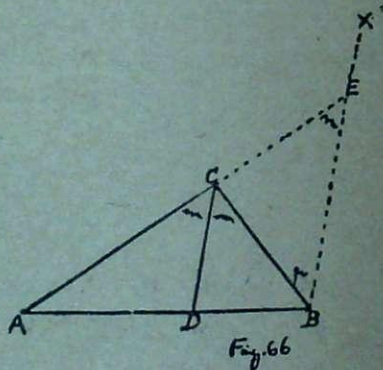
Reciproca : *toda a recta que dividir em partes proporcionaes dois lados de um triângulo, será paralela ao outro lado.*

Seja DE uma recta (fig. anterior) que divida os lados AB e AC do triângulo ABC em partes proporcionaes : $\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{CE}$ Pelo ponto D traçando uma paralela a BC, ter-se-ia uma relação igual a $\frac{AD}{BD}$. E como entre A e C só há um ponto nessa mesma relação, o da paralela a BC, segue-se ser DE paralela a AC.

Teorema : *a bissectriz do ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto em partes proporcionaes aos outros dois lados.*

Seja ABC um triângulo e CD a bissectriz do ângulo em C : queremos provar que $\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}$

Fig. 66

Tracemos por B a paralela BX á bissectriz e prolonguemos AC até E. Os ângulos m e n serão iguaes, como correspondentes (pag. 16) ; os ângulos m e p se-lo-ão tambem, como alternos-internos : logo n=p, isto é,

o triângulo BCE é isósceles, por conseguinte CB=CE. No triângulo ABE a paralela CD a BE dá

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{CE}$$

Ou, substituindo CE por seu igual BC :

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}$$

Reciproca : *se uma recta partindo do vértice de um ângulo interno de um triângulo dividir o lado oposto em partes proporcionaes aos outros dois lados, é porque ela é bissectriz do dito ângulo.*

Teorema : *a bissectriz do ângulo externo de um triângulo determina, sobre o prolongamento do lado oposto, um ponto cujas distâncias ás extremidades desse lado são proporcionaes aos outros dois lados.*

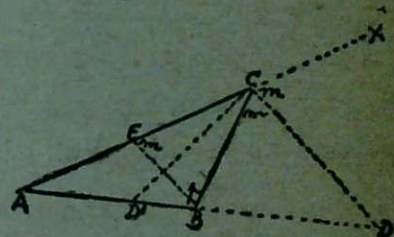
Seja o triângulo ABC e CD a bissectriz do ângulo externo BCX : queremos provar que

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}$$

Fig. 67

Traçando BE paralela a CD, os ângulos m e n serão iguaes, como correspondentes ; e m e p, como alternos internos : logo, n=p, isto é, o triângulo BCE é isósceles, sendo portanto CE=BC. Mas no triângulo ACD, por ser BE paralela a CD, tem-se :

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{CE}$$

ou, substituindo CE por seu igual BC :

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}$$

Reciproca : se na figura anterior existir a proporção $\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}$, será CD bissectriz do ângulo externo XCD.

Corolário : traçando duas bissectrizes do mesmo vértice C de um triângulo, uma interna e outra externa, tem-se :

$$\frac{AD'}{BD'}=\frac{AC}{BC}\ ;\ \frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}\ \therefore\ \frac{AD'}{BD'}=\frac{AD}{BD}$$

Isto é : *as distâncias do ponto D' aos extremos do lado AB estão entre si como as distâncias do ponto D aos mesmos extremos.* O mesmo dar-se-ia com as distâncias do ponto A e do ponto B aos ditos pontos D e D'. Taes pontos são *conjugados* relativamente aos extremos do lado AB. Costuma-se dizer que a recta AB é dividida *harmônicamente* pelos 4 pontos A, B, D e D'. Quando uma recta é dividida harmônicamente, *o producto da parte inteira* AD *pelo segmento médio* BD' *é igual ao producto dos segmentos extremos,* AD' e BD : basta aplicar a propriedade fundamental (Arith., Vol. II, pág. 73) á proporção última :

$$AD'.BD=AD.BD'$$

Triângulos semelhantes são os que têm ângulos respectivamente iguaes e lados homólogos proporcionaes.

Polígonos semelhantes são os que têm ângulos respectivamente iguaes e lados homólogos proporcionaes.

Linhas homólogas são as que ligam vértices de ângulos iguaes nas figuras semelhantes.

Lados homólogos são lados unindo vértices de ângulos iguaes.

Pontos homólogos são vértices de ângulos iguaes.

A semelhança dos polígonos é dada numéricamente pela respectiva relação de semelhança.

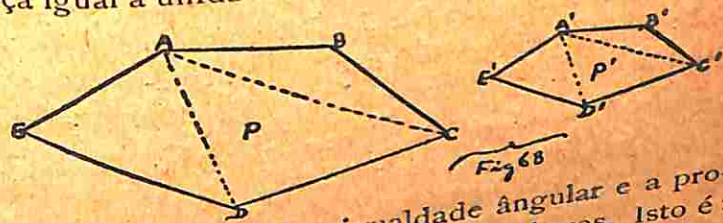
Relação de semelhança de duas figuras semelhantes é a relação numérica existente entre duas quaesquer das suas linhas homólogas.

Duas figuras semelhantes têm sempre a mesma fórma, apenas diferindo em *grandeza* ou extensão. Daí a acertada definição :

Figuras semelhantes são as que diferem apenas na escala em que são construidas.

Quanto mais a relação da semelhança se aproximar da unidade, tanto mais as figuras semelhantes se aproximarão da igualdade : essa relação sendo igual á unidade, as figuras semelhantes passam a ser iguaes.

A teoria da igualdade, pois, é algébricamente caso particular da teoria da semelhança : é essa mesma teoria, quando a relação de semelhança igual á unidade.

Duas as condições para que dois ou mais polígonos sejam semelhantes : a respectiva igualdade angular e a proporcionalidade dos elementos rectilíneos homólogos. Isto é : para que o polígono P seja semelhante a P', forçoso que se tenham A=A', B=B', C=C', D=D' e E=E' e

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{AE}{A'E'}$$

Admitindo que A'B' seja os $\frac{3}{5}$ de AB, a respectiva relação de semelhança será $\frac{3}{5}$, relação de semelhança dos 2 polígonos dados.

A relação de semelhança dêles 2 foi dada pela relação entre os lados homólogos A'B' e AB, mas podia ser por B'C' e BC, por C'D' e CD, ou por duas outras linhas homólogas quaesquer, como por exemplo as diagonaes AC e A'C'.

Semelhança dos triângulos:

Triângulos semelhantes são os que têm ângulos respectivamente iguaes e lados homólogos proporcionaes. Se o triângulo ABC for semelhante a A'B'C', ter-se-á:

$$A=A',\ B=B',\ C=C' \text{ e } \frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$$

A semelhança dos triângulos funda-se na seguinte lei, chamada *lei linear de Tales*:

Proposição fundamental: *toda a paralela a um dos lados de um triângulo determina um segundo triângulo semelhante ao primeiro.*

Seja o triângulo ABC e DE paralela a BC: queremos provar ser ADE semelhante a ABC.

Fig 69

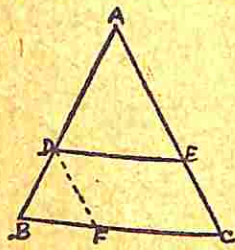
Se DE é paralela a BC, ter-se-á B=D, como correspondentes; E=C, pela mesma razão; e A comum: logo, ha perfeita igualdade ângular entre os 2 triângulos. Sendo DE paralela a BC, ter-se-á (pag. 93):

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$$

Traçando DF paralela a AC, ter-se-á análogamente:

$$\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{FC}$$

Logo, em vista da razão comum:

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{FC}$$

ou, por ser CF=DE, como paralelas postas entre paralelas:

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}$$

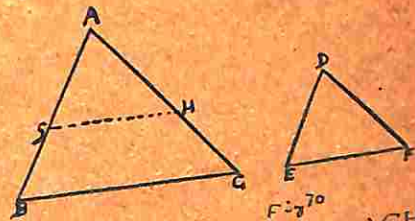
Isto é: há perfeita igualdade angular e proporcionalidade dos elementos rectilíneos homólogos, o que prova serem semelhantes os dois triângulos considerados.

Corolario: *a recta que unir os meios de dois lados de um triângulo será paralela ao outro lado, sendo igual á metade do mesmo.*

Casos de semelhança dos triângulos: Há tres casos distintos de semelhança dos triângulos, correspondentes aos casos já conhecidos de igualdade, assim de triângulos como de triedros e tetraedros: no 1º caso, *um* lado e dois ângulos; no 2º caso, *dois* lados; e no 3º, *tres* lados. Mas como não se pode estabelecer proporção apenas com dois lados, um de cada triângulo, ficam em jogo apenas os dois ângulos de cada um, os quaes, por serem iguaes, arrastam a igualdade dos terceiros ângulos (lei angular de Tales). Portanto, ao 1º caso de igualdade corresponde o seguinte 1º caso de semelhança dos triângulos:

1º caso: *dois triângulos equiângulos são semelhantes.*

Sejam os triângulos ABC e DEF, nos quaes se tenha A=D, B=E e C=F.

Façamos AG=DE e tracemos por G a paralela GH a BC: os triângulos ABC e AGH são semelhantes, em vista da *lei fundamental* e se provarmos que DEF=AGH, teremos provado a desejada semelhança. O ângulo G=B, como correspondentes; mas como B=E por hipótese, segue-se que G=E. E como, por construcção, AG=DE, os

2 triângulos DEF e AGH serão iguaes, por terem um lado igual adjacente a ângulos respectivamente iguaes (1º caso).

2º caso: *dois triângulos são semelhantes, quando têm um ângulo igual compreendido por dois lados proporcionaes.*

Sejam os dois triângulos ABC e DEF, da figura anterior, nos quaes se tenha

$$A=D \text{ e } \frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}$$

Tomemos AG=DE e tracemos GH paralela a BC. Ficarão formados dois triângulos, ABC e AGH, semelhantes pela lei fundamental: bastará então provar a igualdade de DEF e AGH. A paralela GH a BC dá:

$$\frac{AB}{AG}=\frac{AC}{AH}$$

Mas como AG=DE por construcção, virá:

$$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{AH}$$

Mas como esta proporção tem uma razão comum, $\frac{AB}{DE}$, com a que foi dada, segue-se que

$$\frac{AC}{DF}=\frac{AC}{AH}$$

Fracções iguaes, com o mesmo numerador, devem ter os denominadores iguaes: logo DF=AH. E os dois triângulos DEF e AGH são iguaes, por terem um ângulo igual compre-endido por lados iguaes (2º caso).

3º caso: *dois triângulos são semelhantes, quando têm os 3 lados proporcionaes.*

Sejam os mesmos triângulos ABC e DEF, nos quaes se tenha:

$$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}$$

Resta provar a igualdade angular respectiva. Tomemos AG=DE e façamos passar por G uma paralela a BC. Ficarão formados dois triângulos, semelhantes pela lei fundamental. Basta, então, provar a igualdade de AGH e DEF. Por ser ABC semelhante a AGH, ter-se-á:

$$\frac{AB}{AG}=\frac{AC}{AH}=\frac{BC}{GH}$$

Mas como, por construcção, AG=DE, a primeira destas três relações é a mesma que a 1ª das três dadas, o que arrasta a igualdade de todas elas. Logo,

$$\frac{AC}{AH}=\frac{AC}{DF}\ ;\ \frac{BC}{GH}=\frac{BC}{EF}$$

ou, AH=DF e GH=EF. Isto é: os dois triângulos são iguaes, por terem os tres lados respectivamente iguaes (3º caso).

Poligonos semelhantes:

Teorema: *dois polígonos semelhantes podem ser decompostos no mesmo número de triângulos semelhantes e semelhantemente dispostos.*

Sejam P e P', fig. da pag. 97, dois polígonos semelhantes. De dois vértices homólogos A e A' tracemos as diagonaes AC e AD, A'C' e A'D': queremos provar que os triângulos ABC e A'B'C', ACD e A'C'D', ADE e A'D'E' são semelhantes.

Se P e P′ são semelhantes, tem-se :

$$A=A',\ B=B',\ C=C',\ D=D',\ E=E' \text{ e } \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EA}{E'A'}$$

Portanto, os triângulos ABC e A′B′C′ são semelhantes, por terem um ângulo igual, B=B′, compreendido por lados proporcionaes (2º caso), o mesmo acontecendo com os triângulos AED e A′E′D′. Resta apenas provar a semelhança de ACD e A′C′D′, o que é evidente, em vista de terem ambos os tres lados proporcionaes (3º caso).

Reciproca : *dois polígonos compostos do mesmo número de triângulos semelhantes e semelhantemente dispostos, são semelhantes.*

Sejam as duas figuras já consideradas. Se os triângulos componentes são respectivamente semelhantes, ter-se-ão as relações :

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'};\ A=A',\ B=B',\ C=C',$$

$$\frac{AC}{A'C'}=\frac{AD}{A'D'}=\frac{CD}{C'D'};\ A=A',\ C=C',\ D=D',$$

$$\frac{AD}{A'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EA}{E'A'};\ D=D',\ E=E',\ A=A',$$

Suprimindo as relações comuns e somando os 3 ângulos em A e A′ e os dois em C e C′ e em D e D′, vem :

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{AE}{A'E'};\ A=A',\ B=B',\ C=C',\ D=D',\ E=E'$$

Isto é : *há igualdade ângular e proporcionalidade dos elementos rectilíneos homólogos, sinaes evidentes da desejada semelhança.*

Portanto, *dois polígonos são semelhantes, quando se podem decompôr no mesmo número de triângulos semelhantes e semelhantemente dispostos.*

Questões sobre semelhança de triângulos e polígonos:

Teorema : *dois triângulos que têm lados respectivamente paralelos ou perpendiculares, são semelhantes.*

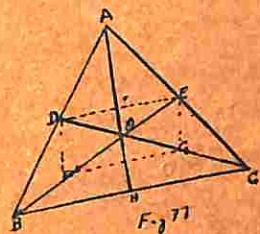
Sejam ABC e A′B′C′ dois triângulos com os lados respectivamente paralelos ou perpendiculares. Bastará provar serem eles equiângulos (1º caso). Como dois ângulos com os lados paralelos ou perpendiculares são iguaes ou suplementares (pág. 18), ter-se-ão as seguintes relações :

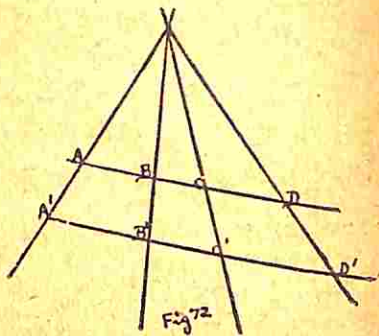
$$A=A' \text{ ou } A+A'=180$$
$$B=B' \text{ ou } B+B'=180$$
$$C=C' \text{ ou } C+C'=180$$

Mas as tres últimas relações não podem existir ao mesmo tempo, nem tão pouco duas delas, por violarem a lei angular respectiva : ficam existindo apenas as tres primeiras, isto é, $A=A'$, $B=B'$ e $C=C'$, *c. s. q. d.*

Teorema : *as medianas de um triângulo encontram-se no mesmo ponto, ²/₃ a partir de cada vértice.*

Fig. 77

Seja o triângulo *ABC*, e *BE*, *CD* e *AH* as medianas dos ângulos respectivos. Tomemos o meio F de *OB* o meio G de *OC* e unamos *FG*, *GE*, *DF* e *ED*. No triângulo *BOC*, *GF* é paralela a BC e igual a ¹/₂ desta recta (pág. 93) ; *DE* é tambem paralela a BC e igual a ¹/₂ desta linha. Logo *DEFG* é paralelogramo : portanto, *FO=OE*. E como *FO=FB*, *FB=FO=OE*, isto é, o ponto *O* estará a ²/₃ de B. Provar-se-ia análogamente estar êle tambem a ²/₃ de *A* de *C*.

Teorema: *rectas convergentes interceptadas por duas paralelas, dividem estas e ficam por elas divididas em partes proporcionaes.*

Sejam as 4 convergentes em V interceptadas pelas paralelas AD e A'D'. Os triângulos VAB e VA'B', VBC e VB'C', VCD e VC'D' serão semelhantes (lei angular de Tales), e ter-se-á sem trabalho, suprimidas as relações comuns:

$$\frac{VA}{VA'}=\frac{VB}{VB'}=\frac{VC}{VC'}=\frac{VD}{VD'}=\frac{AB}{AB'}=\frac{B'C}{BC'}=\frac{C'D}{CD'}$$

Recíproca: *se duas paralelas, interceptadas por um número qualquer de transversaes, dividem estas e ficam por elas divididas em partes proporcionaes, essas transversaes concorrerão num único ponto.*

Teorema: *os perímetros de dois polígonos semelhantes estão entre si como duas linhas homólogas quaesquer*

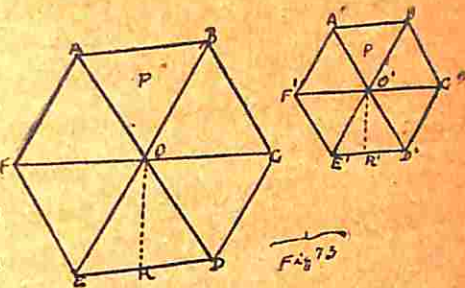
Sejam P e P′ dois polígonos semelhantes, cujos lados sejam respectivamente AB, BC, CD, DE e EA, AB', BC', C'D',D'E' e E'A'. Se êles são semelhantes, ter-se-á:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EA}{E'A'}$$

E como a soma de todos os antecedentes está para a soma de todos os consequentes, como qualquer antecedente para o respectivo consequente (Arith., Vol. II, pag. 100), vem, chamando p e p′ os perímetros dos 2 polígonos:

$$\frac{p}{p'}=\frac{AB}{A'B'}\cdot$$

Teorema: *polígonos regulares do mesmo número de lados são semelhantes.*

Sejam os dois hexágonos P e P'. A soma dos ângulos internos no hexágono P é 2 (6—2) ou 2×4 ou 8 rectos, ou 720°; e como são todos iguaes, cada um deles valerá $\frac{720}{6}$, ou 120°;

no hexágono P' dar-se-á a mesma coisa, cada ângulo interno valendo tambem 120º: então entre êles dois existe a igualdade angular necessária. Vejamos a proporcionalidade dos elementos rectilíneos homólogos. Os lados de P sendo iguaes entre si, como tambem os de P', a relação entre uns e outros será sempre a mesma. Portanto, os dois polígonos são semelhantes.

Corolário: *os perímetros de dois polígonos regulares estão entre si como seus raios ou como seus apotemas.*

Traçando em P o apotema OR e em P' o apotema O'R', seria fácil provar a semelhança dos triângulos EOR e E'O'R', por equiângulos. Portanto $\frac{a}{a'}=\frac{r}{r'}=\frac{ED}{E'D'}=\frac{p}{p'}$.

Lei do quadrilátero inscrito: *em todo o quadrilátero inscrito o produto das diagonaes é igual á soma dos produtos dos lados opostos.*

Seja ABCD o quadrilátero inscrito; a, b, c e d, os lados; e e f as duas diagonaes. Queremos provar que ef=ad+bc.

Tracemos a recta AE, de modo que o ângulo BAE seja igual a CAD.

Os triângulos CAD e BAE sendo semelhantes, como equiângulos, darão:

$$\frac{a}{f}=\frac{BE}{d}; \text{ ou } a \times d = BE.f$$

Os triângulos ABD e CAE, tambem equiângulos e semelhantes, darão:

Fig 74

$$\frac{c}{f}=\frac{CE}{b}, \text{ ou } bc=CE.f$$

Somando ordenadamente as duas igualdades, vem:

$ad+bc=BE.f+EC.f$, ou $ad+bc=f(BE+EC)$; ou $ef=ad+bc$.

c. s. q. d.

Relações numéricas interessantes:

Projeção de uma recta sobre outra é a parte desta última, compreendida entre os traços das perpendiculares abaixadas dos extremos daquela sobre esta: a projeção de AB sobre xy vem a ser ab:

Se uma recta for paralela a outra, sua projecção sobre esta outra com ela se confundirá; isto é, será em verdadeira grandeza; e se uma recta for perpendicular a outra, sua projeção sobre esta outra se reduzirá a um simples *ponto*—o respectivo *traço*.

Fig 75

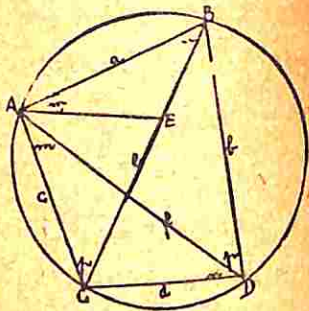
Teorema: *em todo o triângulo rectângulo, cada lado do ângulo recto é média proporcional entre a hipotenusa inteira e sua projeção sobre a hipotenusa.*

Seja o triângulo rectângulo ABC, ou T, no qual a é a hipotenusa; b e c, os 2 catetos; h a altura; m, a projecção de c sobre a; e n, a projecção de b sobre a. Os triângulos rectângulos T e T' são semelhantes, como equiângulos (1º caso): portanto,

Fig 76

$$\frac{a}{c}=\frac{c}{m}, \text{ ou } c^2=am$$

Os triângulos T e T'' são tambem semelhantes, por equiângulos (1º caso): portanto,

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{n}, \text{ ou } b^2=an$$

1º corolário: *em todo o triângulo rectângulo a altura é média proporcional entre os dois segmentos que ela determina sobre a hipotenusa.* Efectivamente: se T é semelhante a T' e tambem a T'', estes dois últimos triângulos serão semelhantes entre si, o que dará

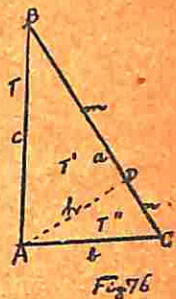
$$\frac{m}{h}=\frac{h}{n} \text{ ou } h^2=mn, \text{ c. s. q. d.}$$

2º corolário: *em todo o triângulo rectângulo o quadrado de um lado é igual á hipotenusa, multiplicada pela sua projecção sobre ela.* Isto é:

$$b^2=am;\ c^2=an,$$

igualdades que se tiram das proporções estabelecidas precedentemente, na demonstração do teorema respectivo.

3º corolário: *em todo o triângulo rectângulo o quadrado da hipotenusa é igual á soma dos quadrados dos catetos.* Com efeito: somando ordenadamente as duas igualdades do corolário anterior, vem:

$$b^2+c^2=am+an;\ a(m+n)=b^2+c^2;\ a^2=b^2+c^2.$$

Desta última igualdade se infere : *o quadrado de um lado é igual ao quadrado da hipotenusa menos o quadrado do outro lado:*

$$b^2=a^2-c^2, \text{ ou } c^2=a^2-b^2$$

4° corolário : *em todo o triângulo rectângulo os quadrados dos catetos estão entre si como as respectivas projecções sobre a hipotenusa.* Basta dividir ordenadamente as expressões $b^2=an$, $c^2=am$:

$$\frac{b^2}{c^2}=\frac{an}{am} \; ; \; \frac{b^2}{c^2}=\frac{n}{m}$$

Teorema : *num triângulo qualquer o quadrado do lado oposto a um ângulo agudo é igual á soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o dobro producto de um dêles pela projecção do outro sobre êle.*

Seja o ângulo agudo B do triângulo BAC, figura anterior. Considerando o triângulo T″, tem-se :

$$b^2=h^2+n^2$$

Mas como $n=a-m$, vem :

$$n^2=(a-m)^2 \; ; \; n^2=a^2-2am+m^2.$$

Substituindo este valor de n^2 na igualdade acima, vem :

$$b^2=h^2+a^2-2am+m^2 \qquad (1)$$

Mas o triângulo T dá : $c^2=h^2+m^2$. Portanto, levando este valor em (1) :

$$b^2=a^2+c^2-2am$$

c. s. q. d.

Nota—Considerando o triângulo acutângulo ou obtusângulo, a conclusão analítica seria a mesma.

Teorema : *em todo o triângulo obtusângulo o quadrado do lado oposto ao ângulo obtuso é igual á soma dos quadrados dos outros dois lados, mais o dobro do producto de um dêles pela projecção do outro sobre êle.*

Seja o triângulo ABC. Traçando-lhe a altura h e prolongando b até D, ter-se-á no triângulo rectângulo CBD :

Fig. 77

$$a^2=h^2+m^2$$

Mas $m=b+n$, $m^2=(b+n)^2$; $m^2=b^2+2bn+n^2$

Logo,

$$a^2=h^2+b^2+n^2+2bn$$

Sendo $h^2+n^2=c^2$, por causa do triângulo rectângulo ABD, vem :

$$a^2=b^2+c^2+2bn$$

c. s. q. d.

Corolário geral : *um triângulo é acutângulo, rectângulo ou obtusângulo, conforme o quadrado do maior lado for inferior, igual ou superior á soma dos quadrados dos outros dois lados.*

Teorema ; *em todo o triangulo a soma dos quadrados de dois lados é igual ao dobro do quadrado da mediana do 3° lado, mais o dobro do quadrado da metade desse mesmo lado.*

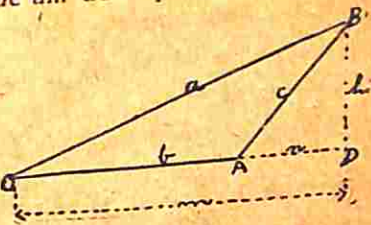
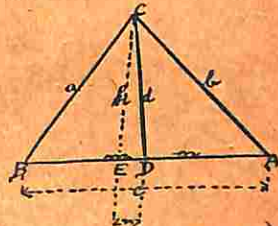
Seja o triângulo ABC e CD=d a mediana do lado c. Tracemos CE ou a altura h. No triângulo ADC, obtuso em D, tem-se :

$$a^2=m^2+d^2+2mn$$

E no triângulo DCB, agudo em D:

$$b^2=m^2+d^2-2mn$$

E, somando ordenadamente essas duas igualdades :

$$a^2+b^2=2(m^2+d^2) \qquad (1)$$

Corolário : *em todo o triângulo o quadrado de uma mediana é igual á semi-soma dos quadrados dos dois lados adjacentes, menos o quadrado da metade do 3º lado.*

Da igualdade anterior, tirando o valor de d^2 vem :

$$2d^2=a^2+b^2-2m^2 \ ; \ d^2=\frac{a^2+b^2}{2}-m^2; \ d^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\left(\frac{c}{2}\right)^2,$$

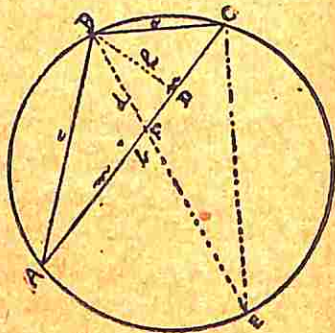
porque $m=\frac{c}{2}$.

Teorema : *em todo o triangulo o producto de dois lados é igual ao producto do diâmetro da circunferência circunscrita pela altura relativa ao outro lado.*

Seja o triângulo ABC, cujos lados designaremos por a, b e c, e por h a altura. Traçando a circunferência pelos três vértices, o diâmetro BE e a corda EC, os triângulos rectângulos ABD e BCE serão semelhantes, por equiângulos. Portanto,

$$\frac{BA}{BE}=\frac{BD}{BC} \ ; \ \frac{c}{2r}=\frac{h}{a} \ ; \ ac=2r.\ h$$

c. s. q. d.

Teorema : *duas circunferências quaesquer são semelhantes :* porque podem ser consideradas como os limites para os quaes tendem dois polígonos regulares, do mesmo número de lados, todos infinitamente pequenos. E polígonos regulares do mesmo número de lados são sempre semelhantes

E se $\frac{p}{p'}=\frac{r}{r'}$, ter-se-á, chamando C e C′ os comprimentos das duas circunferências :

$$\frac{C}{C'}=\frac{r}{r'}, \text{ ou } \frac{C}{C'}=\frac{2r}{2r'}$$

ou, alternando a proporção,

$$\frac{C}{2r}=\frac{C'}{2r'}$$

Isto é : *a relação entre a circunferência e o diâmetro é uma quantidade constante, chamada pí.*

Teorema : *a perpendicular ao diâmetro, por um ponto qualquer da circunferência, é média proporcional entre os segmentos que ela determina sobre o diâmetro.*

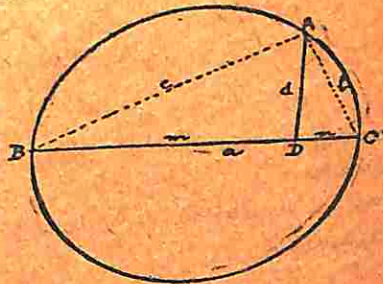
Seja AD perpendicular ao diâmetro BC. Tracemos AB e AC : o triângulo BAC será rectângulo em A, sendo AD a respectiva altura. Ter-se-á, portanto :

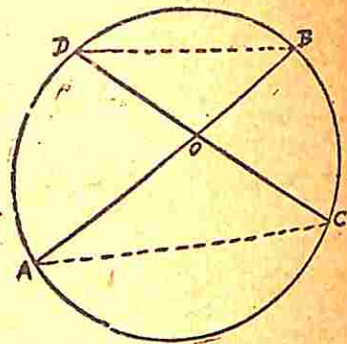
$$\frac{m}{d}=\frac{d}{n}, \text{ ou } d^2=mn$$

1º corolário : *o quadrado da perpendicular de um ponto da circunferência sobre o diâmetro é igual ao producto dos dois segmentos respectivos :* $d^2=mn$, como se tira da proporção anterior.

2º corolário : *o quadrado de uma corda partindo do extremo de um diâmetro é igual ao producto do diâmetro pela sua projecção sobre êle.* Na figura anterior, considerando o triângulo BAC, tem-se :

$$\overline{AB}^2=BC.BD$$

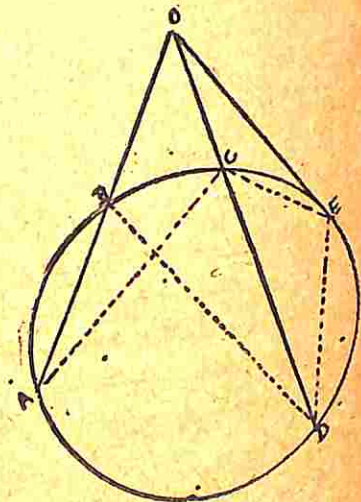
Teorema : *quando duas cordas se interceptam, o producto*

dos dois segmentos de uma é igual ao producto dos dois segmentos da outra.

Sejam AB e CD duas cordas que se encontrem. Liguemos os pontos A e C, B e D. Os dois triângulos AOC e DOB são semelhantes, como equiângulos (1º caso). Então

$$\frac{OA}{OD}=\frac{OC}{OB}, \text{ ou } OA.OB=OC.OD$$

c. s. q. d.

Recíproca: *quando duas rectas* AB *e* CD *se encontram em* O *segundo a relação* OA.OB =OC.OD, *os quatro pontos* A, B, C *e* D *pertencem á mesma circunferência.*

Teorema: *quando duas secantes se encontram, o producto de uma por sua parte externa é igual ao producto da outra por sua parte externa.*

Sejam as duas secantes OA e OD. Tracemos as cordas AC e BD. Os triângulos AOC e DOB são semelhantes, como equiângulos. Então

$$\frac{OA}{OD}=\frac{OC}{OB}, \text{ ou } OA.OB=OC.OD$$

Corolário: *duas secantes que partem do mesmo ponto fora da circunferência estão entre si, como inversamente as suas partes externas.* E' o que mostra a proporção anterior.

Teorema: *se uma tangente e uma secante partem do mesmo ponto, a tangente é média proporcional entre a secante inteira e sua parte externa.*

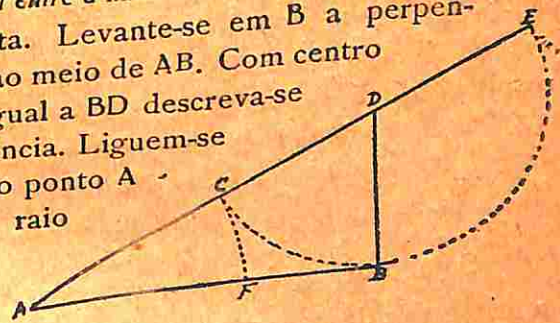
Seja a secante OD e a tangente OE figura anterior. Traçando as cordas CE e DE, ficam formados os triângulos ODE e OCE, semelhantes como equiângulos. Então,

$$\frac{OD}{OE}=\frac{OE}{OC}, \text{ ou } OD.OC=\overline{OE}^2,$$

c. s. q. d.

Corolário: *quando uma tangente e uma secante partem do mesmo ponto exterior, o quadrado da tangente é igual ao producto da secante por sua parte externa.* E' o que mostra a última igualdade acima escrita.

Teorema: *dividir uma recta em média e extrema razão.* Isto é : *dividir uma linha em duas partes, de modo que a maior delas seja média proporcional entre a linha inteira e a parte menor.*

Seja AB a recta. Levante-se em B a perpendicular BD, igual ao meio de AB. Com centro em D e com raio igual a BD descreva-se uma semi-circunferência. Liguem-se os pontos D e E. Do ponto A como centro, com raio igual a AC, trace-se o arco CF : o ponto F dividirá a recta AB em média e extrema razão.

Com effeito : a tangente AB é média proporcional entre a secante inteira, AE, e sua parte externa, AC :

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AB}{AC}$$

Ou, aplicando uma propriedade das proporções (Arit., Vol. II, pág. 74).

$$\frac{AE-AB}{AB}=\frac{AB-AC}{AC}$$

Mas como AB=CE e AC=AF, virá :

$$\frac{AC}{AB}=\frac{FB}{AC}\ ;\ \frac{AF}{AB}=\frac{BF}{AF}\ ;\ \text{ou}\ \frac{BF}{AF}=\frac{AF}{AB}$$

c. s. q. d.

Nota interessante : *a média razão* AF *pode ser dada analiticamente, em funcção da recta* AB.

Vejamos isso.

Seja AB=a e AF ou AC=x. Segundo a construcção da figura, $BD=CD=\frac{a}{2}$. E o triângulo rectângulo ABD dá :

$$AD^2=AB^2+DB^2 \text{ ou}$$

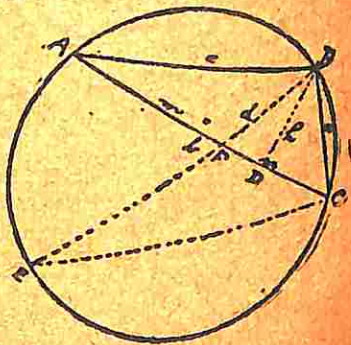
$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2=a^2+\frac{a^2}{4}\ ;\ \left(x+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{5a^2}{4}\ :$$

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\sqrt{5}\right)^2\ ;\ x+\frac{a}{2}=\frac{a}{2}\sqrt{5}\ ;\ x=\frac{a}{2}\left(+\sqrt{5}-1\right)$$

Ordinariamente se toma o signal positivo, sendo o resultado final, depois de extraída a raiz :

$$x=0.618\,a$$

Teorema : *o producto de 2 lados de um triângulo é igual ao quadrado da bissectriz do ângulo por êles formado, mais o producto dos segmentos do lado oposto.*

Seja o triângulo ABC, BF=d a bissectriz de B e m e n os segmentos respectivos AF e FC. Descrevamos a *circunferência* circunscrita, prolonguemos BF até E e tracemos a corda CE. Os triângulos

BAF e ECB são semelhantes, por equiângulos (1º caso). Então

$$\frac{a}{d+EF}=\frac{d}{c}, \text{ ou } ac=d^2+d.EF$$

Mas d.EF=mn, como cordas que se interceptam. Logo,

$$ac=d^2+mn$$

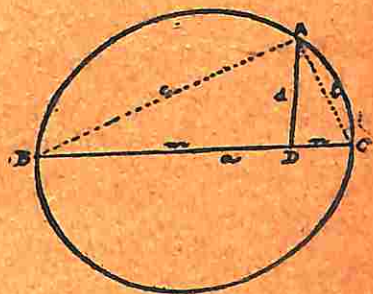
c. s. q. d.

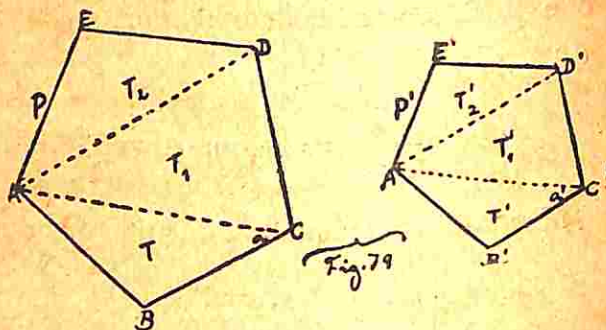
Corolário : *o quadrado da bissectriz de ângulo interno de um triângulo é igual ao produto dos lados do ângulo, menos o produto dos segmentos do lado oposto.* Porque a igualdade anterior dá :

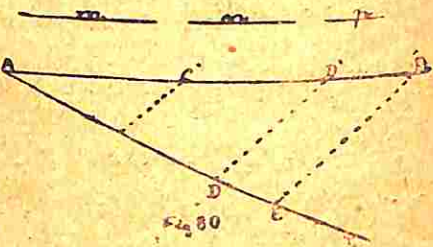
$$d^2=ac-mn$$

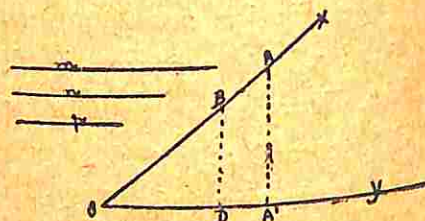
Problemas sobre figuras semelhantes :

1º Problema : *achar a média proporcional entre duas rectas dadas.*

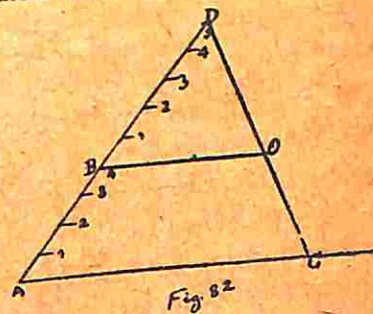
Sejam m e n as rectas dadas. Sobre uma recta AX tomem-se as distâncias BD=m e DC=n e sobre BC, como diâmetro, construa-se uma circunferência : a perpendicular ao diâmetro, AD, será a média proporcional pedida. Porque a perpendicular ao diâmetro é média proporcional entre os segmentos por êle determinados (pág. 111).

2º problema : *construir um polígono semelhante a* P, *sobre a recta* a', *que deve ser homóloga ao lado* a.

Decomponha-se em triângulos o polígono dado. Construa-se sobre a' o triângulo T', semelhante a T, reproduzindo em T' os ângulos B e C. Sobre A'C' construa-se análogamente o triângulo T_1' semelhante a T_1. Finalmente sobre A'D' construcção análoga: T_2 semelhante a T_2'. Os 2 polígonos serão semelhantes, porque compostos do mesmo numero de triângulos semelhantes e semelhantemente dispostos.

3° problema: *dividir uma recta* AB *em partes proporcionaes a tres rectas dadas.*

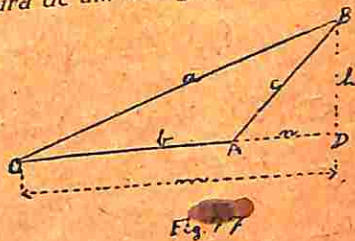
A partir de A trace-se a recta indefinida AX e tome-se AC=m, CD=n e DE=p; Una-se o ponto B ao ponto E e por D e C tracem-se rectas paralelas a BE: a semelhança dos triângulos assim formados prova a proporcionalidade desejada.

4° problema: *achar uma quarta proporcional a 3 rectas dadas,* m, n *e* p.

Trace-se um ângulo agudo XOY. Sôbre o lado OX tomem-se as distâncias OA=m e OB=n; e sôbre o outro

lado, a distância OD=p; una-se o ponto B ao ponto D e por A trace-se uma paralela a BD: OA' será a quarta proporcional desejada, em vista da semelhança dos triângulos OAA' e OBD.

5° problema: *por um ponto* O *no interior de um ângulo* A *traçar uma recta que seja por êle dividida em duas partes proporcionaes a uma relação dada.*

Seja $\frac{4}{5}$ a relação dada. Trace-se OB paralela a um dos lados do ângulo; divida-se AB em 4 partes iguaes; tome-se BD igual a 5 dessas partes: DOC será a recta pedida.

Quatro problemas interessantes:

1° problema: *Calcular a altura de um triângulo, em funcção dos lados.*

Seja o triângulo ABC cujos lados designaremos por a, b e c, sendo h a altura BD. Chamando o perímetro 2p, será facil ver que

$$a+b+c=2p \quad (1)$$
$$a+b+c-2c=2p-2c \text{ ou } a+b-c=2(p-c) \quad (2)$$
$$a+b+c-2b=2p-2b \text{ ou } a-b+c=2(p-b) \quad (3)$$
$$a+b+c-2a=2p-2a \text{ ou } -a+b+c=2(p-a) \quad (4)$$

O triângulo CDB sendo rectângulo, dá:

$$h^2=a^2-m^2 \quad (5)$$

No triângulo ABC o quadrado do lado oposto ao ângulo agudo C é igual á soma dos quadrados dos outros dois lados,

menos o dobro do producto de um dêles pela projecção do outro sobre êle. Logo,

$$c^2=a^2+b^2-2bm$$

Daí se deduz o valor de m :

$$2bm=a^2+b^2-c^2 \; ; \; m=\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$$

Levando este valor de m na igualdade (5), vem :

$$h^2=a^2-\frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4b^2}=\frac{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{4b^2}=$$

$$\frac{(2ab+a^2+b^2-c^2)\,(2ab-a^2-b^2+c^2)}{4b^2}=$$

$$\frac{[(a+b)^2-c^2]\,[c^2-(a-b)^2]}{4b^2}=$$

$$\frac{(a+b+c)\,(a+b-c)\,(c+a-b)\,(c-a+b)}{4b^2}$$

Ou, atendendo ás igualdades (1), (2), (3) e (4) :

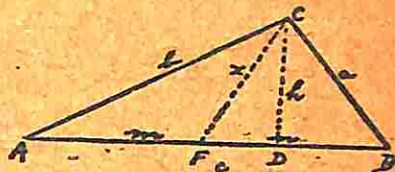
$$h^2=\frac{2p.2(p-c)2(p-b)2(p-a)}{4b^2}=\frac{4p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{b^2}$$

E, extraindo a raiz quadrada :

$$h=\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)\,(p-b)\,(p-c)} \; .$$

fórmula da altura para o lado b. Para o lado a, a fórmula seria a mesma, apenas diferindo o 1º factor, $\frac{2}{a}$; para o lado c, o 1º factor seria $\frac{2}{c}$.

2º problema : *calcular a mediana de um triângulo em função dos lados.*

Seja o triângulo ABC, cujos lados representaremos por a, b e c, sendo h a altura CD e x a mediana CF.

Como em todo o triângulo a soma dos quadrados de dois lados é igual ao dobro do quadrado da mediana, mais o dobro do quadrado da metade do terceiro lado, ter-se-á :

$$a^2+b^2=2x^2+2\left(\frac{c}{2}\right)^2;$$

$$a^2+b^2=2x^2+\frac{c^2}{2};$$

$$2a^2+2b^2=4x^2+c^2 \; ;$$

$$2\,(a^2+b^2)-c^2=4x^2$$

$$x^2=\frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}; \quad x=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$$

3º problema : *calcular a bissectriz de um ângulo de um triângulo, em função dos lados.*

Seja o triângulo ABC figura anterior, cujos lados designaremos por a, b e c, sendo CF=x a bissectriz do ângulo C. Como o quadrado da bissectriz de um ângulo de um triângulo é igual ao produto dos dois lados que o formam, menos o producto dos segmentos determinados sobre o terceiro lado, virá, chamando m e n os dois segmentos :

$$x^2=ab-mn \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Mas sendo CD a bissectriz do ângulo C, ter-se-á, de acordo com o estatuido á pag. 94 :

$$\frac{m}{b}=\frac{n}{a}$$

Daí se tira :

$$\frac{m+n}{a+b}=\frac{m}{b} \text{ e } \frac{m+n}{a+b}=\frac{n}{a} \text{ ; ou } \frac{c}{a+b}=\frac{m}{b}; \quad \frac{c}{a+b}=\frac{n}{a}$$

Portanto, ...
$$\begin{cases} m=\dfrac{bc}{a+b} & . \ . \ . \ . \ . \ (2) \\ n=\dfrac{ac}{a+b} & . \ . \ . \ . \ . \ (3) \end{cases}$$

E, levando os valores (2) e (3) na igualdade (1) :

$$x^2=ab-\frac{abc^2}{(a+b)^2}=ab\left(1-\frac{c^2}{(a+b)^2}\right)=$$

$$\frac{ab((a+b)^2-c^2)}{(a+b)^2}=\frac{ab(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2}= .$$

$$\frac{ad.2.p2(p-c)}{(a+b)^2}=\frac{4abp(p-c)}{(a+b)^2},$$

porque $a+b+c=2p$ e $a+b-c=2(p-c)$, como se viu á pág. 17. Estraíndo a raiz, vem :

$$x=\frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}$$

4º problema : *calcular o raio da circunferência circunscrita a um triângulo, em funcção dos lados.*

Seja o triângulo ABC, fig. da pág 115, cujos lados designaremos por a, b e c, sendo a altura $AD=h$.

Como em todo o triângulo o produto de dois lados é igual ao produto do diâmetro da circunferência circunscrita pela altura relativa ao terceiro lado, pág. 110, ter-se-á, chamando r o raio da circunferência :

$$bc=2r \ h \ ; \ r=\frac{bc}{2h}$$

Mas h em função dos lados, conforme ao estabelecido na pág. 119, é :

$$h=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Portanto, levando êste valor de h na igualdade anterior :

$$r=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

Exercicios interessantes :

1—Achar a 4ª proporcional ás linhas que têm de comprimento 9,1 ; 6,5 e 13,3.

2—Achar a média proporcional ás linhas que têm de extensão 3,9 e 35,1.

3—Achar a terça proporcional ás linhas de comprimento igual a 5,4 e 0,3.

4—No triângulo ABC, AB=12, AC=14 e BC=13 : achar os segmentos de BC, feitos pela bissectriz do ângulo A.

5—A base de um triângulo é 7 ½ metros, sendo a altura igual a 5 ½ metros : sendo a base do triângulo semelhante igual a 5 ½ metros, determinar-lhe a altura homóloga.

6—Provar que duas alturas de um triângulo são inversamente proporcionaes ás bases correspondentes.

7—Provar que dois triângulos isósceles, com ângulos do vértice iguaes, são semelhantes.

8—Provar que a paralela á base de um triângulo tem seu meio sobre a mediana.

9—Demonstrar que o ponto de encontro das diagonaes de um trapézio, divide ambas em partes proporcionaes ás bases.

10—Provar que rectas igualmente inclinadas sôbre a

bissectriz de um ângulo, determinam triângulos semelhantes entre si.

11—Demonstrar que são semelhantes os rectângulos circunscritos a um mesmo quadrilátero cujas diagonaes se interceptam em ângulo recto.

12—Provar que dois polígonos semelhantes, de qualquer modo que estejam colocados no plano, têm um centro de semelhança.

13—Demonstrar que num triângulo duas alturas quaesquer são inversamente proporcionaes ás bases respectivas.

14—Provar que dois lados quaesquer de um triângulo estão entre si como as projecções de um sôbre outro.

15—Mostrar que num triângulo a diferença dos quadrados de dois lados é igual á diferença dos quadrados das projecções dos mesmos sôbre o terceiro lado.

16—Verificar se a soma dos quadrados das três medianas é igual aos três quartos da soma dos quadrados dos três lados.

17—Obter a seguinte relação de Euler

$$d^2 = R(R-2r)$$

na qual d é a distância entre o centro do círculo inscrito e o do círculo circunscrito, sendo R e r os respectivos raios.

18—Examinar se, num paralelogramo, as distâncias de um ponto qualquer da diagonal aos dois lados adjacentes, são inversamente proporcionaes a esses lados.

19—Ver se a soma das diagonaes de um quadrilátero é igual ao dobro da soma dos quadrados das linhas que unem os meios dos lados opostos.

20—Mostrar que as bissectrizes dos ângulos externos de um triângulo encontram os lados opostos em tres pontos situados na mesma linha recta.

21—Examinar se concorrem num pônto as rectas que unem os pontos de contacto de um círculo, inscrito num triângulo, aos respectivos vértices opostos.

22—Examinar se as diagonaes de um pontágono regular se dividem mútuamente em média e extrema razão.

23—Provar que quando uma corda corta o diâmetro num ângulo de 45°, é constante a soma dos quadrados dos segmentos da dita corda.

Teoria da semelhança

II

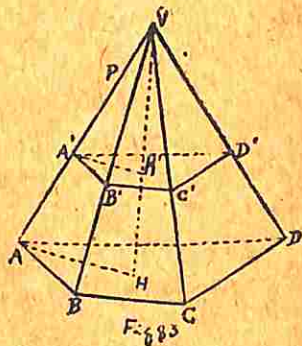
CASO REVERSO

Noções fundamentaes:

Poliedros semelhantes são os que têm ângulos poliedros iguaes e faces homólogas respectivamente semelhantes. Isto é: entre os políedros semelhantes, como em o caso plano, há perfeita igualdade angular e tambem a indispensavel proporcionalidade dos elementos rectilíneos homólogos.

Semelhança dos tetraedros:

Proposição fundamental: *todo o plano paralelo á base de uma pirâmide, determina uma 2ª pirâmide semelhante á 1ª.*

Seja P uma pirâmide e A'C' uma secção paralela á base: queremos provar que VABCD e V'A'B'C'D' são semelhantes. As faces lateraes são todas elas triângulos semelhantes, em vista da lei fundamental respectiva (pág. 98). O ângulo sólido em V é comum ás duas; o triedro em A e o triedro em A' são iguaes (3º caso), por terem os ângulos das faces respectivamente iguaes, como pertencentes a polígonos semelhantes, o mesmo dir-se-ia com os outros ângulos

sólidos: logo as duas pirâmides são de facto semelhantes, pela proporcionalidade das faces e igualdade dos ângulos, *c. s. q. d.*

Corolário: supondo as arestas prolongadas além do vértice, o teorema ainda será verdadeiro, sendo os elementos das duas pirâmides *symétricos* relativamente ao vértice.

Ha três casos de semelhança dos tetraedros, correspondentes aos três casos de igualdade já analisados: 1º caso, *uma* face; 2º caso, *duas* faces; 3º caso *três* faces.

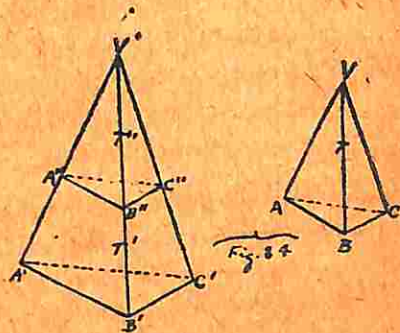
1º caso: *dois tetraedros são semelhantes, quando têm uma face semelhante, adjacente a diedros respectivamente iguaes e semelhantemente dispostos.*

Sejam os dois tetraedros T e T', nos quaes se tenham semelhantes as faces AVC e A'V'C' e iguaes os diedros adjacentes VA e V'A', VC e V'C', AC e A'C'. Tomando V'A"=VA e traçando por A" um plano paralelo á base A'B'C', o tetraedro formado, T", será semelhante a T', pela lei fundamental; e se provarmos ser êle igual a T, teremos demonstrado a proposição. Sabemos por hipótese que

$$\frac{VA}{V'A'}=\frac{VC}{V'C'}=\frac{AC}{A'C'},$$

e, por construção,

$$\frac{V'A''}{V'A'}=\frac{V'C''}{V'C'}=\frac{A''C''}{A'C'}$$

Mas como VA=V'A", por construção, segue-se que VC=V'C" e que AC=A"C". Os diedros de T e T' sendo

iguaes por hipótese, e os de T' e T'' por construcção, segue-se que os de T e T'' se-lohão tambem : logo os dois tetraedros T e T'' serão iguaes, por terem uma face igual adjacente a diedros respectivamente iguaes.

2° caso : *dois tetraedros são semelhantes, quando têm duas faces semelhantes e semelhantemente dispostas e igual o diedro por elas formado.*

Sejam os dois tetraedros T e T', figura anterior, nos quaes se tenham semelhantes as faces VAC e V'A'C', VAB e V'A'B' e iguaes os diedros VA e V'A' por elas formados. Tomemos V'A'' igual a VA e façamos passar por A'' um plano paralelo á base de T' : o tetraedro assim formado, T'', será semelhante a T', pela lei fundamental ; se êle for igual a T, estará demonstrada a proposição. Os triângulos VAC e V'A''C'', semelhantes a V'A'C', serão semelhantes entre si : e como V'A''=VA, êles dois serão iguaes. Análogamente os triângulos VAB e V'A'B'. Então T e T'' serão iguaes, por terem duas faces iguaes e igual o diedro por elas formado, *c. s. q. d.*

3° caso : *dois tetraedros são semelhantes, quando têm três faces semelhantes e semelhantemente dispostas.*

Sejam os dois tetraedros T e T', tendo semelhantes as faces AVB e A'V'B', BVC e B'V'C', AVC e A'V'C'. Em T' tomemos V'A''=VA e passemos por A'' um plano paralelo á base : ficarão formados dois tetraedros T' e T'', semelhantes pela lei fundamental. Resta provar a igualdade de T e T''. Se T' e T'' são semelhantes, ter-se-á :

$$\frac{V'A'}{V'A''}=\frac{V'B'}{V'B''}=\frac{V'C'}{V'C''}$$

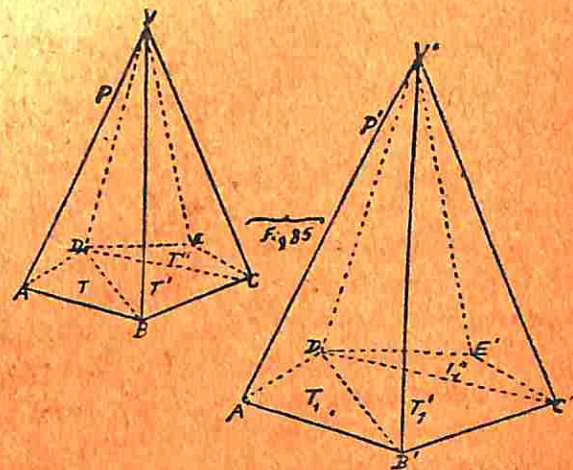
Mas como V'A''=VA por construcção e, por hipótese,

$$\frac{V'A'}{VA}=\frac{V'B'}{VB}=\frac{V'C'}{VC}$$

segue-se que V'B''=VB e V'C''=VC, isto é, T e T'' são iguaes, por terem três faces respectivamente iguaes.

Semelhança das pirâmides : A semelhança das pirâmides depende da dos tetraedros.

Proposição : *duas pirâmides são semelhantes, quando podem ser decompostas no mesmo número de tetraedros semelhantes e semelhantemente dispostos.*

Sejam as pirâmides P e P', ambas decompostas em três tetraedros semelhantes e semelhantemente dispostos, todos com o vértice em V e V' e com as bases T e T_1, T' e T_2, T'' e T_3. Se estes tetraedros são semelhantes, ter-se-á entre êles a igualdade ângular e tambem a proporcionalidade dos elementos rectilíneos homólogos : e como os ângulos daqueles são por sua soma os ângulos das duas pirâmides, sendo a mesma a proporcionalidade dos elementos, segue-se que elas duas têm ângulos iguaes e faces respectivamente semelhantes : logo, são semelhantes, *c. s. q. d.*

Reciproca : *duas pirâmides semelhantes podem ser decompostas no mesmo número de tetraedros semelhantes e semelhantemente dispostos.*

Semelhança dos prismas. A semelhança dos prismas fica dependendo da dos prismas triângulares ; e como êstes podem ser decompostos em três tetraedros equivalentes

fica a semelhança dos prismas dependendo tambem da dos tetraedros.

Prisma triângular: *dois prismas triângulares são semelhantes, quando se podem decompôr em três tetraedros semelhantes e semelhantemente dispostos.*

Sejam dois prismas P e P′ decompostos âmbos em 3 tetraedros semelhantes, segundo a lei estabelecida á pág. 84. Se os tetraedros componentes são semelhantes, têm ângulos iguaes e faces respectivamente semelhantes. E como os ângulos dêles três, por sua soma, dão os ângulos de P e de P′, sendo a mesma a proporcionalidade dos elementos rectilíneos e homólogos, segue-se haver entre os dois prismas dados rigorosa igualdade angular e tambem a indispensavel proporcionalidade dos elementos rectilíneos homólogos: logo, são semelhantes êles dois, *c. s. q. d.*

Reciproca: *dois prismas triangulares semelhantes podem ser decompostos em três tetraedros semelhantes e semelhantemente dispostos.*

Prismas quaesquer: *dois prismas são semelhantes, quando se podem decompôr no mesmo número de prismas triângulares semelhantes e semelhantemente dispostos.* Sejam dois prismas P e P′, decompostos ambos em 4 prismas triangulares semelhantes e semelhantemente dispostos. Se os prismas triangulares são semelhantes, há entre êles rigorosa igualdade angular e tambem a indispensavel proporcionalidade dos elementos rectilíneos homólogos. E como os ângulos dos prismas triangulares, por sua soma, dão todos os ângulos dos prismas dados, sendo a mesma a proporcionalidade dos elementos rectilíneos homólogos, segue-se que taes prismas são semelhantes, *c. s. q. d.*

Reciproca: *dois prismas semelhantes podem ser decompostos no mesmo número de prismas triangulares semelhantes e semelhantemente dispostos*

Exercicios interessantes:

1—Construir um rectângulo que tenha para dimensões as raizes da equação $x^2-12x+32=0$.

2—Descrever uma circunferência que passe por dois pontos A e B, sendo tangente á recta CD.

3—Descrever uma circunferência que passe por dois pontos A e B, sendo tangente a circunferência C.

4—Achar o raio e o diâmetro de uma circunferência, conhecendo a corda AB e a flexa CD.

5—Achar os dois pontos M e N que dividem a recta CD na relação $\frac{5}{3}$ C M D . . . . N

6—Determinar o centro de semelhança das duas circunferências C e C′ (*Centro de semelhança* é o ponto de encontro das rectas que unem as estremidades dos raios paralelos do mesmo sentido).

7—Traçar uma tangente comum a duas circunferências.

8—Achar a imagem geométrica dos pontos cujas distâncias a dois pontos fixos estão na relação constante $\frac{7}{5}$.

9—Provar que toda a paralela á base de um triângulo é dividida ao meio pela mediana.

10—Provar que a recta que une os meios das bases de um trapézio passa, ao ser prolongada, pelo ponto de encontro dos lados não paralelos.

11—Provar que o ponto de encontro das diagonaes de um trapézio divide as mesmas em partes proporcionaes ás bases.

12—Provar que a paralela ás bases de um trapézio, traçada pelo ponto de encontro das duas diagonaes, é dividida ao meio por esse ponto.

13—Provar que quando dois triângulos têm dois ângulos respectivamente iguaes e dois outros suplementares, os lados opostos áqueles são proporcionaes aos lados opostos a estes últimos.

14—Provar que se os lados de um paralelogramo, sendo prolongados, passam por 4 pontos fixos de uma mesma recta, as diagonaes prolongadas passarão por dois outros, da mesma linha.

15—Provar que se a semi-circunferência descrita sobre o lado oblíquo de um trapézio rectângulo interceptar o lado oposto, cada ponto da intersecção dividirá esse lado em dois segmentos, cujo produto será igual ao das bases do trapézio.

16—Provar que a distância de um ponto da circunferência a uma corda é média proporcional entre as distâncias do mesmo ponto ás tangentes traçadas pelas extremidades da dita corda.

17—Provar que rectas igualmente inclinadas sobre a bissectriz de um ângulo, determinam triângulos semelhantes.

18—Provar que unindo dois a dois os traços das alturas de um triângulo, formar-se-ão tres triângulos semelhantes ao que foi dado.

19—Provar que quando as diagonaes de um quadrilátero se cruzam em ângulo recto, os rectângulos circunscritos ao mesmo serão semelhantes entre si.

20—Provar que dois polígonos semelhantes, colocados de modo qualquer num plano, têm sempre um centro de semelhança.

21—Provar que duas alturas, num triângulo, são inversamente proporcionaes ás bases correspondentes.

22—Provar que dois lados quaesquer de um triângulo estão entre si, como suas projecções sobre o outro lado.

23—Provar que a differença dos ângulos da base de um triângulo sendo 90º, a altura do mesmo será média proporcional entre as distâncias do traço ás extremidades da base.

24—Provar que a soma de dois lados, num triângulo, multiplicada pela differença dos mesmos, é igual á soma das projecções dos mesmos lados sobre o 3º, multiplicada pela diferença das ditas projecções.

25—Provar que a diferença dos quadrados de dois lados, num triângulo, é igual á diferença dos quadrados das respectivas projecções sobre o 3º lado.

26—Provar que quando dois triângulos rectângulos são semelhantes, o produto das hipotenusas é igual á soma dos produtos dos lados homólogos.

27—Provar que num triângulo rectângulo os cubos dos catetos estão entre si como as projecções dos segmentos da hipotenusa sobre eles dois.

28—Provar que em todo o triângulo a soma dos quadrados das três medianas é igual aos tres quartos da soma dos quadrados dos lados.

29—Obter a fórmula de Euler, que dá a distância d do centro do circulo r, inscrito, ao centro do circulo R, circunscrito, de um triângulo: $d^2=R(R-2r)$.

30—Provar que em todo o paralelogramo as distâncias de um ponto qualquer da diagonal aos lados adjacentes são inversamente proporcionaes aos ditos lados.

31—Obter a relação

$$a=\frac{2\ b}{ab}$$

na qual a e b representam as bases de um trapézio e d a paralela ás duas, traçada pelo ponto de encontro das duas diagonaes.

32—Provar que a soma dos quadrados das diagonaes de um quadrilátero é igual ao dobro da soma dos quadrados das linhas que unem os meios dos lados opostos.

33—Provar que em todo o quadrilátero a soma dos quadrados dos lados é igual á soma dos quadrados das diagonaes, mais quatro vezes o quadrado da linha que une o meio dos mesmos.

34—Provar que o produto das distâncias de um ponto da circunferência a dois lados opostos de um quadrilátero inscrito é igual ao produto das distâncias desse mesmo ponto aos outros dois lados.

35—Provar que as bissectrizes exteriores dos ângulos de um triângulo encontram os lados opostos em três pontos situados em linha recta.

36—Provar que as rectas que unem os pontos de contacto do círculo inscrito a um triângulo aos vértices dos lados opostos, passam todas três pelo mesmo ponto.

INDICE

INDICE